

Herausgegeben von
Friedrich Kasch
und Bodo Pareigis
Mathematisches
Institut der
Ludwig-Maximilians-
Universität München

Titel Nr. 57
15. Jahrgang
1988

Algebra

Berichte

57

Christian Mucke

**Zerlegungseigenschaften
von stetigen und
quasistetigen Moduln**

Verlag
Reinhard
Fischer



Zerlegungseigenschaften
von
stetigen und quasistetigen Moduln

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
der Fakultät für Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt
von Christian Mucke
aus Nürnberg

eingereicht am 26. Oktober 1987

1. Berichterstatter: Prof. Dr. Friedrich Kasch
2. Berichterstatter: Prof. Dr. Bodo Pareigis

Tag der mündlichen Prüfung: 3. Dezember 1987

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Mucke, Christian:

Zerlegungseigenschaften von stetigen und quasistetigen Moduln
/ Christian Mucke. - München R. Fischer, 1988

(Algebra-Berichte; Nr. 57)

Zugl.: München, Univ., Diss., 1977

ISBN 3-88927-042-5

NE: GT

ISBN 3-88927-042-5

© Verlag Reinhard Fischer 1988

Fallmerayerstr. 36 8000 München 40

Ohne Genehmigung ist es nicht gestattet, Seiten auf irgendeine Weise zu vervielfältigen. Genehmigungen erteilt der Verlag auf Anfrage.

This work is subjekt to copyright. All rights are reserved wether reprinting, reproduction by photostat or similar means.

Druck und Bindung: Novotny, Söcking
Printed in West Germany 1988

Inhalt

Einleitung	Seite 1
Bezeichnungen und Definitionen	viii
Kapitel 0 : Einführung	1
Kapitel 1 : Direkte Summen von (quasi)stetigen Moduln	4
§1 Variationen der lokalen Semi-t-Nilpotenz	4
§2 (Quasi)stetigkeit von direkten Summen	13
Kapitel 2 : Direkte Finitheit von χ_o -quasistetigen Moduln	18
Kapitel 3 : χ_o -quasistetige, χ_o -wesentlich erzeugte Moduln mit der endlichen Austauscheigenschaft	20
Kapitel 4 : Die Austauscheigenschaft von χ -stetigen Moduln über Rechts-ZP-Ringen und rechts kohärenten Ringen	25
§1 χ -stetige Moduln über Rechts-ZP-Ringen	25
§2 χ -stetige Moduln über rechts kohärenten Ringen	34
§3 Die innere Austauscheigenschaft	35
Kapitel 5 : Kürzungs- und Struktureigenschaften χ_o -(quasi)stetiger Moduln über Rechts-ZP-Ringen und rechts kohärenten Ringen	37
§1 Kürzungs- und Substitutionseigenschaft	37
§2 χ_o -Quasistetigkeit von endlichen direkten Summen	41
§3 Wurzelziehen	47
§4 Isomorphie von Hüllen	52
§5 Die abzählbare Interpolationseigenschaft	55
§6 Eine Charakterisierung der χ_o -Stetigkeit	58

Kapitel 6 :	Rechts kohärente, rechts χ_o -stetige Ringe und ihre Grothendieckgruppe	61
Kapitel 7 :	Die F-injektive Hülle von Moduln über einem rechts kohärenten Ring	68
Kapitel 8 :	Reguläre, rechts χ_o -stetige Ringe und ihre Faktorringe	72
§1	Reguläre, rechts χ_o -stetige Ringe	72
§2	Faktorringe von regulären, rechts χ_o -stetigen Ringen	77
Anhang		87
Literatur		90

Einleitung

Der Begriff der stetigen Moduln hat seine Ursprünge in den dreißiger Jahren, als von Neumann 'continuous geometries' einführte. In Verallgemeinerung von stetigen Moduln sind κ -stetige und κ -quasistetige Moduln bis heute Gegenstand vieler Arbeiten. In der vorliegenden Arbeit werden Zerlegungs- und Struktureigenschaften dieser Moduln untersucht.

Im 0-ten Kapitel werden für eine Kardinalzahl κ die κ -Erweiterungseigenschaft, κ -quasistetig und κ -stetig definiert. Einige grundlegende Eigenschaften werden bereit gestellt.

Kapitel 1 befaßt sich mit direkten Summen (quasi)stetiger Moduln. Für injektive oder quasiinjektive Moduln wurde dies in vielen Arbeiten bereits getan. Endliche direkte Summen (quasi)stetiger Moduln haben B.Müller und S.Rizvi in [14] untersucht. Für unendliche direkte Summen solcher Moduln setzten diese beiden Autoren in [15] die direkte Unzerlegbarkeit der Summanden voraus. In Kapitel 1 werden einige Ergebnisse aus [15] ohne diese Voraussetzung bewiesen und weitere Resultate hinzugefügt. Hierbei spielen die zwei Variationen der lokalen Semi- t -Nilpotenz - schwache und starke lokale Semi- t -Nilpotenz - wie sie in §1 definiert werden, eine wichtige Rolle. Diese beiden Definitionen werden motiviert durch die Tatsache, daß sich der Wirkungskreis der lokalen Semi- t -Nilpotenz bis auf Ausnahmefälle auf direkte Summen direkt unzerlegbarer Moduln beschränkt. Zunächst wird, was auch für Kapitel 5 von großer Bedeutung ist, für eine Familie von Moduln, deren direkte Summe χ_0 -quasistetig ist, die schwache, und unter der zusätzlichen Voraussetzung der direkten Finitheit für diese Summe, die starke lokale Semi- t -Nilpotenz bewiesen. Als Folgerung hieraus läßt sich mit Hilfe eines Ergebnisses meiner Diplomarbeit von Zerlegungseigenschaften der Summanden einer direkt finiten, χ_0 -quasistetigen direkten Summe von Moduln auf Zerlegungseigenschaften dieser Summe schließen. Lemma 1.8 bildet die Grundlage für alle weiteren Ergebnisse von Kapitel 1. Es beweist eine Zerlegungsmöglichkeit für eine Folge von Homomorphismen zwischen quasistetigen Moduln. Satz 1.9 zeigt, daß für eine schwach lokal semi- t -nilpotente Familie $(M_i)_{i \in I}$ von quasistetigen Moduln und Homomorphismen $M_{i_1} \xrightarrow{f_1} M_{i_2} \xrightarrow{f_2} M_{i_3} \xrightarrow{f_3} \dots, i_k \in I$ disjunkt, für alle $x \in M_{i_1}$ ein

$n \in \mathbb{N}$ existiert, so daß die Rechtsannullatoren von $f_m \dots f_1(x)$ für alle $m \geq n$ gleich sind. Satz 1.11 charakterisiert für direkte Summen quasistetiger Moduln, wo paarweise verschiedene Summanden gegenseitig injektiv sind, die schwache lokale Semi- t -Nilpotenz durch eine Annulatorbedingung. Die Äquivalenz dieser Annulatorbedingung mit der lokalen Semi- t -Nilpotenz zeigen B.Müller und S.Rizvi für obige Summen mit direkt unzerlegbaren Summanden. Dieses Resultat folgt aus Satz 1.11. §1 schließt, aufbauend auf drei Lemmata, mit dem Ergebnis, daß für stetige Moduln V eine unendliche Familie von Kopien von V genau dann schwach lokal semi- t -nilpotent ist, wenn die direkte Summe über diese Familie ein Harada-Modul ist.

In §2 in Kapitel 2 geht es um die Frage, wann direkte Summen (quasi)stetiger Moduln diese Eigenschaften wieder erfüllen. Hierbei spielen eine Injektivitätsbedingung und eine weitere Annulatorbedingung eine wichtige Rolle, die in den Äquivalenzen von Satz 1.22 und Satz 1.23 zum Ausdruck kommen. Die Aussagen dieser beiden Sätze wurden in [15] für direkte Summen direkt unzerlegbarer Moduln bewiesen. Dort wurde insbesondere für den Beweis von 1.23 die Theorie der Harada-Moduln verwendet, die für den 'nicht direkt unzerlegbaren Fall' nicht zur Verfügung steht. §2 und damit Kapitel 1 enden mit zwei Folgerungen aus Satz 1.23 und Beispielen für direkte Summen (quasi)stetiger Moduln, die nicht direkte Summe direkt unzerlegbarer Moduln sind.

Die restlichen Kapitel befassen sich nur noch mit κ -(quasi)stetigen Moduln, wobei κ eine höchstens abzählbare Kardinalzahl ist.

In Kapitel 2 werden χ_0 -(quasi)stetige Moduln ohne weitere Voraussetzungen untersucht. Lemma 2.1 ist von essentieller Bedeutung für viele Sätze dieser Arbeit. Hier werden χ_0 -quasistetige Moduln M und χ_0 -wesentlich erzeugte Moduln A , so daß eine unendliche direkte Summe S von Kopien von A in M enthalten ist, betrachtet: 'Hüllen' von A bzw. S , d.h. bis auf Isomorphie direkte Summanden von M , in welchen A bzw. S groß enthalten sind, werden von M 'verschluckt'; sie können zu M addiert werden und die Summe bleibt isomorph zu M .

Aus diesem Lemma ergeben sich mehrere Folgerungen:

- 1) Ein χ_0 -quasistetiger Modul ist genau dann direkt finit, wenn er keine unendliche Summe paarweise isomorpher, von Null verschiedener Untermoduln enthält bzw. jeder Untermodul direkt finit ist. Diese Äquivalenzen wurden von Kutami in [10] für nicht-singuläre, χ_0 -quasistetige Moduln bewiesen.

- 2) Zwei χ_0 -quasistetige, χ_0 -wesentlich erzeugte Moduln, die sich gegenseitig bis auf Isomorphie als direkte Summanden enthalten, sind isomorph.
- 3) Zwei χ_0 -stetige, χ_0 -wesentlich erzeugte Moduln, die sich gegenseitig bis auf Isomorphie enthalten, sind isomorph.

Kapitel 3 befaßt sich mit χ_0 -quasistetigen, χ_0 -wesentlich erzeugten Moduln M mit der endlichen Austausch eigenschaft. Diese endliche Austausch eigenschaft erweist sich als unentbehrliches Hilfsmittel für die Durchführung der Beweise in diesem Kapitel. Daß χ_0 -quasistetige Moduln i.a. nicht die endliche Austausch eigenschaft besitzen, sieht man an $\mathbb{Z}$. Es ist jedoch nicht bekannt, ob χ_0 -stetige Moduln diese Eigenschaft haben.

Satz 3.3 besagt insbesondere, daß für M und $M \oplus A \cong M \oplus B$ A und B zwei isomorphe direkte Summanden besitzen und die 'Reste' von M 'verschluckt' werden. Die anschließende Folgerung erweitert einen Teil der Aussage dieses Satzes. Lemma 3.5 besagt, daß es für M und Moduln A_i und L_i ($i \in \mathbb{N}$) mit $A_1 \overset{\oplus}{\hookrightarrow} A_2 \overset{\oplus}{\hookrightarrow} \dots \overset{\oplus}{\hookrightarrow} \dots M$, $A_i \oplus L_i \cong A_{i+1}$, Untermoduln M_i von M gibt, so daß $M_1 \overset{\oplus}{\hookrightarrow} M_2 \overset{\oplus}{\hookrightarrow} \dots \overset{\oplus}{\hookrightarrow} \dots M$, $M_i \cong A_i$ sowie $M_{i+1}/M_i \cong L_i$ gilt.

Das Pendant hierzu wird gleichfalls bewiesen:

Zu einem Modul A und χ_0 -quasistetigen, χ_0 -wesentlich erzeugten Moduln Y_i, L_i mit der endlichen Austausch eigenschaft und $A \overset{\oplus}{\hookrightarrow} \dots \overset{\oplus}{\hookrightarrow} Y_1 \overset{\oplus}{\hookrightarrow} \dots \overset{\oplus}{\hookrightarrow} Y_1$, $Y_{i+1} \oplus L_i \cong Y_i$, gibt es Moduln X_i , so daß $A \overset{\oplus}{\hookrightarrow} \dots \overset{\oplus}{\hookrightarrow} X_1 \overset{\oplus}{\hookrightarrow} \dots \overset{\oplus}{\hookrightarrow} X_1$, $X_i \cong Y_i$ sowie $X_i/X_{i+1} \cong L_i$ gilt.

Schließlich wird bewiesen, daß sich für Moduln A_1, A_2, B_1, B_2 mit $A_1, A_2 \overset{\oplus}{\hookrightarrow} B_1, B_2 \overset{\oplus}{\hookrightarrow} M$ ein Modul C finden läßt, für den $A_1, A_2 \overset{\oplus}{\hookrightarrow} C \overset{\oplus}{\hookrightarrow} B_1, B_2$ gilt.

Kapitel 4 wird durch die Frage bestimmt, wann χ -stetige Moduln die (endliche) Austausch eigenschaft besitzen.

Die zentralen Ergebnisse von §1 in Kapitel 4 sind zum einen der Nachweis der Austausch eigenschaft für 1-stetige, projektive Moduln über Rechts-ZP-Ringen, d.h. Ringen, für welche alle zyklischen Rechtsideale projektiv sind, und zum anderen der Nachweis der endlichen Austausch eigenschaft für χ -wesentlich erzeugte, χ -stetige Untermoduln eines freien Moduls über einem Rechts-ZP-Ring. Aus dem ersten Ergebnis folgt ein Resultat von Stock in [18]: Projektive Moduln über einem regulären Ring haben die Austausch eigenschaft. Ein Beispiel belegt, daß es Rechts-ZP-Ringe R und 1-stetige, projektive R -Moduln gibt, die nicht regulär sind, d.h. in welchen nicht jeder endlich

erzeugte Untermodul direkter Summand ist.

In §2 wird die endliche Austausch Eigenschaft für endlich wesentlich erzeugte, endlich stetige und χ_0 -wesentlich erzeugte, χ_0 -stetige Untermoduln von freien Moduln über einem rechts kohärenten Ring bewiesen.

In §3 wird die innere Austausch Eigenschaft definiert. Es wird gezeigt, daß χ_0 -wesentlich erzeugte, χ_0 -quasistetige Untermoduln von freien Moduln über Rechts-ZP-Ringen oder rechts kohärenten Ringen die innere Austausch Eigenschaft besitzen.

In Kapitel 5 werden über Rechts-ZP-Ringen und rechts kohärenten Ringen χ_0 -wesentlich erzeugte, χ_0 -(quasi)stetige Untermoduln M von freien R -Moduln und auch direkte Summen hiervon untersucht.

In §1 wird die Substitutionseigenschaft für direkt finites, χ_0 -stetiges M gezeigt. Ist M projektiv direkt finit, kann auf die Voraussetzung ' χ_0 -wesentlich erzeugt' verzichtet werden, um mit Hilfe eines Ergebnisses meiner Diplomarbeit die Substitutionseigenschaft von M zu erhalten. Weil aufgrund eines Satzes in §6 χ_0 -quasistetige, projektive Moduln über einem regulären Ring bereits χ_0 -stetig sind, verbessern beide Resultate Theorem 7 von Kutami in [10], in dem die Kürzungseigenschaft für direkt finite, projektive, χ_0 -wesentlich erzeugte, χ_0 -quasistetige Moduln über regulären Ringen bewiesen wird. Aus den obigen Ergebnissen folgt zudem sofort Theorem 8 in [10], daß die Summe zweier direkt finiter, projektiver, χ_0 -quasistetiger Moduln über einem regulären Ring direkt finit ist. Eine weitere mit Hilfe von Satz 4.5 meiner Diplomarbeit mögliche Folgerung ist, daß direkt finite, rechts kohärente, rechts χ_0 -stetige Ringe 1 im stabilen Rang haben. Für direkt finite, reguläre, rechts χ_0 -stetige Ringe wurde dies von Goodearl in [7] gezeigt. In Satz 5.6 werden Eigenschaften endlich erzeugter, projektiver Moduln M über einem rechts kohärenten, rechts χ_0 -stetigen Ring bewiesen:

Ist M direkt finit, so hat M die Substitutionseigenschaft.

Ist $M \oplus N \oplus M$, so ist $M \cong N$.

Letzteres wurde von Goodearl in [7] für endlich erzeugte, projektive Moduln über einem direkt finiten, regulären, rechts χ_0 -stetigen Ring bewiesen. Wie ich während des Aufschreibens dieser Arbeit erfahren habe, ist dieses Ergebnis in einer Arbeit von P. Ara im Journal of Algebra, August 1987, auch für endlich erzeugte, projektive Moduln über einem regulären, rechts χ_0 -stetigen Ring gezeigt worden.

§2 hat als wichtigstes Ergebnis, daß für χ_0 -wesentlich erzeugte, χ_0 -quasistetige Untermoduln $B_1, \dots, B_n$ eines freien Moduls über R ihre direkte Summe wieder χ_0 -quasi-

stetig ist, wenn $B_i B_j$ - χ_0 -injektiv für $i \neq j$ ist.

Dies ist die Grundlage für §3: Satz 5.20 besagt, daß für χ_0 -wesentlich erzeugte, χ_0 -stetige Untermoduln M von freien Moduln über R aus $mM \cong nM$ für ein $m \in \mathbb{N}$ schon $M \cong N$ folgt. Satz 5.21 zeigt dies für endlich erzeugte, projektive Moduln über einem rechts kohärenten, rechts χ_0 -stetigen Ring. Für direkt finite, reguläre, rechts χ_0 -stetige Ringe ist das ein Satz von Goodearl. Ohne die Bedingung 'direkt finit' folgt es aus der oben zitierten Arbeit von Ara.

§4 beinhaltet den Struktursatz, daß für χ_0 -quasistetige Untermoduln M eines freien R -Moduls und χ_0 -wesentlich erzeugte isomorphe Untermoduln A und B von M ihre 'Hüllen' isomorph sind. Kutami hat dies für direkt finite, projektive, χ_0 -quasistetige Moduln über regulären Ringen in [10] gezeigt.

Mit Hilfe des Struktursatzes folgt in §5 die abzählbare Interpolationseigenschaft eines χ_0 -wesentlich erzeugten, χ_0 -stetigen Untermoduls M eines freien R -Moduls:

Für $i, j \in \mathbb{N}$ und $A_i \subseteq B_j \subseteq M$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ gibt es ein C , so daß $A_i \subseteq C \subseteq B_j$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$. Für direkt finite, reguläre, rechts χ_0 -stetige Ringe zeigt Goodearl in [7] diese Interpolationseigenschaft.

Eine weitere Anwendung von §4 sind die Sätze 5.30 und 5.31 in §6:

Ein χ_0 -wesentlich erzeugter, χ_0 -quasistetiger Untermodul M eines freien R -Moduls oder ein projektiver, χ_0 -quasistetiger R -Modul M ist genau dann χ_0 -stetig, wenn jeder injektive, große Endomorphismus von M ein Isomorphismus ist.

Über einem rechts endlich-stetigen, rechts kohärenten Ring ist jeder projektive, χ_0 -quasistetige Modul bereits χ_0 -stetig.

Die Äquivalenzen von Satz 5.30 werden in [10] für direkt finite, projektive, χ_0 -wesentlich erzeugte, χ_0 -quasistetige Moduln über regulären Ringen bewiesen. Satz 5.31 verbessert Theorem 9 in [10], welches besagt, daß über einem regulären Ring, der das Komparabilitätsaxiom erfüllt, direkt finite, projektive, χ_0 -quasistetige Moduln schon χ_0 -stetig sind.

In Kapitel 6 wird mittels der Ergebnisse aus Kapitel 5 gezeigt, daß die Grothendieckgruppe $K_0(R)$ eines rechts kohärenten, rechts χ_0 -stetigen Ringes R eine partiell geordnete unperforierte Interpolationsgruppe ist. Ein Beispiel für einen kommutativen, kohärenten, direkt finiten, χ_0 -stetigen Ring, der nicht ZP-Ring und nicht injektiv ist, wird angegeben. Kapitel 6 schließt mit einem weiteren Beispiel: Es gibt einen unzerlegbaren, rechts kohärenten, rechts χ_0 -stetigen Ring R , der nicht injektiv, nicht direkt

finit ist, und für den $R_R \oplus R_R \neq R_R$ gilt.

Kapitel 7 untersucht die F-injektive Hülle von Moduln M über einem rechts kohärenten Ring. Dabei ist die F-injektive Hülle von M ein Untermodul der injektiven Hülle $M \subset E(M)$ von M. Für reguläre Ringe hat dies Kutami in [11] getan. Es wird gezeigt, daß für einen nichtsingulären, χ_0 -quasistetigen R-Modul auch seine F-injektive Hülle χ_0 -quasistetig ist und diese genau dann direkt finit ist, wenn M direkt finit ist. Kutami setzt in [11] für letzteres χ_0 -stetig voraus. Ein Beispiel für einen Modul, dessen F-injektive Hülle verschieden von seiner injektiven Hülle ist, wird angegeben.

In Kapitel 8 werden reguläre, rechts χ_0 -stetige Ringe R und ihre Faktorringe, die i.a. nicht mehr rechts χ_0 -stetig sein müssen, untersucht.

In §1 werden zunächst Eigenschaften regulärer, rechts χ_0 -stetiger Ringe bewiesen, um diese dann in §2 bis auf die folgenden Ausnahmen für ein Ideal J von R sogar auf ihre Faktorringe R/J zu übertragen:

- 1) Für endlich erzeugte, projektive R-Moduln A, B, A_i, B_i ($i \in \mathbb{N}$) mit $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A$, $B_1 \subset B_2 \subset \dots \subset B$, $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \subset A$, $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \subset B$, $A_i \cong B_i$, gilt $A \cong B$.
- 2) Für den maximalen Rechts- χ_0 -Quotientenring S von R ist $K_0(R)$ isomorph zu $K_0(S)$.
- 3) $K_0(R)$ ist eine σ -vollständige Interpolationsgruppe.

Diese drei Ergebnisse sind von Goodearl in [7] für direkt finite, reguläre, rechts χ_0 -stetige Ringe gezeigt worden.

In §2 wird für ein Ideal J von R und endlich erzeugte R/J -Moduln C und D zunächst bewiesen:

C zieht n-te Wurzeln; ist $C \overset{\circ}{\cong} D \overset{\circ}{\cong} C$, so ist $C \cong D$.

Diese Resultate finden sich für direkt finite, reguläre, rechts χ_0 -stetige Ringe in [7] und für reguläre, rechts χ_0 -stetige Ringe in der Publikation von Ara.

Daß R/J ein Interpolationsring ist, war bisher aufgrund von Theorem 3.2 in [7] für R zusätzlich direkt finit bekannt. Wegen 8.16 gilt dies auch ohne diese Voraussetzung. Zwei weitere wesentliche Resultate in §2 sind, daß aus $C' \subset C$, $D' \subset D$, C', D' χ_0 -wesentlich erzeugt, $C \cong D$ folgt, und die F-injektiven Hüllen von C und D genau dann isomorph sind, wenn C und D isomorph sind. Aus dem letzteren ergibt sich für den maximalen Rechts- χ_0 -Quotientenring T von R/J , daß $C \otimes_{R/J} T$ genau dann isomorph zu $D \otimes_{R/J} T$ ist, wenn $C \cong D$ ist. Damit sind zwei in [5] von Goodearl für reguläre, rechts χ_0 -stetige Ringe formulierte Probleme gelöst. Eine Lösung haben

diese Probleme allerdings auch in der kürzlich erschienenen Arbeit von Ara erfahren, jedoch gelang es Ara nicht, sie auch für Faktorringe zu beantworten. Satz 8.25 charakterisiert diejenigen Ideale J von R , für die R/J direkt finit ist, und anschließend wird eine Menge von Idealen J von R angegeben, für die R/J weiterhin rechts χ_0 -stetig ist. Ara hat in [1] nur ein Ideal angegeben, für welches der Faktor rechts χ_0 -stetig ist. Goodearl hat in [7] die einfachen Faktorringe von direkt finiten, regulären, rechts χ_0 -stetigen Ringen als rechts injektiv nachgewiesen. Ohne die Bedingung 'direkt finit' wird in 8.27 gezeigt, daß die einfachen Faktoren R/M von R entweder rechts injektiv oder alle endlich erzeugten Rechtsideale isomorph zu $(R/M)_{R_M}$ sind. Das Kapitel schließt mit Ergebnissen über die Grothendieckgruppe der Faktoren regulärer, rechts χ_0 -stetiger Ringe.

Herrn Prof. Kasch möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit und das in mich gesetzte Vertrauen herzlich danken.



Bezeichnungen

Grundsätzlich betrachten wir Moduln über einem assoziativen und unitären Grundring R . Unter Moduln verstehen wir immer Rechtsmoduln.

Durch $E(M)$ wird die injektive Hülle eines Moduls bezeichnet.

Für Moduln A und B bedeutet $A \overset{\oplus}{\subseteq} B$ bzw. $A \subseteq B$, daß A bis auf Isomorphie direkter Summand in B bzw. bis auf Isomorphie Untermodul von B ist.

Mit $\aleph_0$ wird die erste unendliche Kardinalzahl bezeichnet.

Für eine Kardinalzahl κ und einen Modul M wird durch κM eine direkte Summe von κ Kopien von M bezeichnet.

Unter regulären Ringen verstehen wir immer von Neumann reguläre Ringe.

Das Ende eines Beweises wird mit '#' gekennzeichnet.

Im übrigen gelten die Bezeichnungen von [9].

Definitionen

Für den mit dem Thema dieser Arbeit nicht so vertrauten Leser werden an dieser Stelle einige bekannte Definitionen wiederholt:

1. Ein Modul heißt direkt finit, wenn er keinen echten, zu sich selbst isomorphen direkten Summanden enthält.
2. Ein Modul M besitzt die Kürzungseigenschaft, wenn aus $M \oplus B \cong M \oplus C$ $B \cong C$ folgt.
3. Ein Modul M besitzt die n -Substitutionseigenschaft für ein $n \in \mathbb{N}$, wenn es zu $N = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n \oplus H = M \oplus K$, $M_1 \cong M$, ein $L \subseteq \bigoplus_{i=1}^n M_i$ und ein $C \subseteq N$ gibt, so daß $C \oplus L \oplus H = C \oplus K$ gilt.
4. Ein Modul M hat die Substitutionseigenschaft, wenn es zu $N = M_1 \oplus H = M_2 \oplus K$ $M_1 \cong M$, ein $C \subseteq N$ gibt, so daß $C \oplus H = C \oplus K$ gilt.
5. Ein Modul M zieht n -te Wurzeln, wenn aus $nM \cong nB$ $M \cong B$ folgt.
6. Ein Modul M besitzt für eine Kardinalzahl κ die κ -Austauscheigenschaft, wenn zu $N = M \oplus H = \bigoplus_{i \in I} C_i$, $|I| \leq \kappa$, Moduln $C_i' \subseteq C_i$ existieren, so daß $N = M \oplus \bigoplus_{i \in I} C_i'$ gilt.

7. Ein Ring R hat 1 im stabilen Rang, wenn für $a_1, a_2, x_1, x_2 \in R$ mit $a_1 x_1 + a_2 x_2 = 1$ ein $t \in R$ existiert, so daß $a_1 + a_2 t$ rechts invertierbar ist.
8. Ein Ring R heißt unit-regulär, wenn für $x \in R$ ein $t \in R$ existiert, so daß $xtx = x$ und t ist invertierbar.
9. Eine Familie $(M_i)_{i \in I}$ von Moduln heißt lokal semi-t-nilpotent, wenn zu jeder Folge $M_{i_1} \xrightarrow{f_1} M_{i_2} \xrightarrow{f_2} M_{i_3} \xrightarrow{f_3} \dots, i_k \in I, i_k \neq i_1 \text{ für } k \neq 1$, von Nichtisomorphismen f_j für alle $x \in M_{i_1}$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $f_n \dots f_1(x) = 0$ gilt.

Kapitel 0

Einführung

0.1 Definitionen

Sei M ein Modul, κ eine Kardinalzahl.

- a) M heißt κ -wesentlich erzeugt, falls M einen κ -erzeugten, großen Untermodul enthält.
- b) Die Menge der κ -wesentlich erzeugten Untermoduln von M wird mit $\kappa(M)$ bezeichnet.
- c) M besitzt die κ -Erweiterungseigenschaft, wenn alle κ -wesentlich erzeugten Untermoduln von M groß in einem direkten Summanden von M enthalten sind.

M besitzt die endliche Erweiterungseigenschaft, wenn M die κ -Erweiterungseigenschaft für alle endlichen Kardinalzahlen κ besitzt.

M besitzt die Erweiterungseigenschaft, wenn M die κ -Erweiterungseigenschaft für alle Kardinalzahlen κ erfüllt.

- d) M heißt κ -quasistetig, falls M die κ -Erweiterungseigenschaft besitzt und für $A \in \kappa(M)$, $A \subseteq M$, $B \subseteq M$, $A \cap B = 0$, folgt, daß $A \oplus B \subseteq M$ ist.

Analog wie in c) wird endlich-quasistetig und quasistetig definiert.

- e) M heißt κ -stetig, falls M die κ -Erweiterungseigenschaft besitzt und aus $A \in \kappa(M)$, $A \subseteq M$, $A \cong B \subseteq M$, folgt, daß $B \subseteq M$ ist.

Analog wie in c) wird endlich-stetig und stetig definiert.

Dadurch, daß sich die κ -Erweiterungseigenschaft nicht nur auf κ -erzeugte Untermoduln sondern auf κ -wesentlich erzeugte Untermoduln bezieht, ist gesichert, daß sie sich auf direkte Summanden überträgt.

0.2 Lemma ([17], Prop.1.4)

Die Eigenschaften a), c), d), e) aus 0.1 übertragen sich auf direkte Summanden.

Im allgemeinen übertragen sich c), d), e) nicht einmal auf endliche direkte Summen. In ([5], Ex.13.8) wird ein Beispiel für einen regulären, stetigen Ring R gegeben, so daß $M_2(R)$ weder rechts noch links stetig ist. Wegen ([8], Th.7.1) ist dann auch $(R \oplus R)_R$ nicht stetig, kann also wegen der Regularität von R nicht einmal die Erweiterungs-

eigenschaft besitzen. Als weiteres Beispiel sei der nicht quasistetige $\mathbb{Z}$ -Modul $M := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ mit sogar quasiinjektiven Summanden genannt. M ist nicht quasistetig, besitzt allerdings noch die Erweiterungseigenschaft.

0.3 Lemma ([17], Th.1.3)

Jeder κ -stetige Modul ist auch κ -quasistetig.

Eine sehr wichtige Charakterisierung der κ -Quasistetigkeit gibt das folgende Lemma.

0.4 Lemma ([17], Prop.1.5)

Sei M ein Modul mit der κ -Erweiterungseigenschaft. Dann ist M genau dann κ -quasistetig, wenn sich für $A \in \kappa(M)$, $B \subseteq M$, $A \cap B = 0$, jeder Homomorphismus von A nach B zu einem Homomorphismus von M nach B fortsetzen läßt.

0.5 Bezeichnung

Sei M ein Modul mit der κ -Erweiterungseigenschaft, $A \in \kappa(M)$. Im allgemeinen kann A groß in verschiedenen direkten Summanden von M enthalten sein. Im folgenden wird, falls Mißverständnisse auszuschließen sind, durch $\bar{A}$ ein (beliebiger) direkter Summand von M bezeichnet, in welchem A groß ist. Ist $B \cong A \in \kappa(M)$, so sei $\bar{B}$ eine Kopie von $\bar{A}$.

Obige Bezeichnungsweise wird durch die im kommenden Lemma bewiesene Tatsache motiviert, daß für einen κ -quasistetigen Modul M und ein $A \in \kappa(M)$ alle direkten Summanden von M , in welchen A groß ist, isomorph sind.

0.6 Lemma

Sei M ein κ -quasistetiger Modul, $A, B \in \kappa(M)$, $A \cap B \subseteq A, B$. Dann ist $\bar{A} \cong \bar{B}$.

Beweis

Sei $\bar{A} \oplus H = M$, $\bar{B} \oplus K = M$. Klar ist $\bar{A} \cap K = 0$, $\bar{A} \oplus K \subseteq M$. Weil M κ -quasistetig ist, gilt aber auch $\bar{A} \oplus K \subseteq M$, also $\bar{A} \oplus K = M$ und somit $\bar{A} \cong \bar{B}$. #

Eine wichtige Fragestellung ist, wann für einen κ -quasistetigen Modul M und zwei isomorphe Untermoduln $A, B \in \kappa(M)$ $\bar{A}$ und $\bar{B}$ isomorph sind. Sie kann auf einfache Weise für den folgenden Fall beantwortet werden.

0.7 Lemma

Sei M ein $\mathfrak{x}$ -quasistetiger Modul. Ist $A, B, C \in \mathfrak{x}(M)$, $A \cap B = 0$, $B \cap C = 0$,
 $A \cong B \cong C$, so ist $\bar{A} \cong \bar{B} \cong \bar{C}$.

Der Beweis folgt aus 0.4.

#

Das folgende Lemma findet sehr häufige Anwendung.

0.8 Lemma

Sei M ein $\mathfrak{x}$ -stetiger Modul, A, B, C, D Moduln mit $A \subseteq^{\oplus} B \subseteq^{\oplus} M$, $C \subseteq D \subseteq^{\oplus} M$,
 $A \cong C \in \mathfrak{x}(D)$, so gilt $C \subseteq^{\oplus} D$.

Der Beweis ist einfach.

#

Kapitel 1

Direkte Summen von (quasi)stetigen Moduln

§ 1 Variationen der lokalen Semi-t-Nilpotenz

1.1 Definitionen

- a) Eine Familie $(M_i)_{i \in I}$ von Moduln heißt stark lokal semi-t-nilpotent, wenn zu jeder Folge

$$M_{i_1} \xrightarrow{f_1} M_{i_2} \xrightarrow{f_2} M_{i_3} \xrightarrow{f_3} \dots, \quad i_k \in I, \quad i_k \neq i_l \text{ für } k \neq l,$$

von Homomorphismen f_j für alle $x \in M_{i_1}$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $f_n \dots f_1(x) = 0$ gilt.

- b) Für eine Folge $M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \xrightarrow{f_3} \dots$ von Homomorphismen f_j sei für $n \in \mathbb{N}$ $K((f_j)_{j \geq n}) := \{ x \in M_n \mid \exists m \geq n : f_m \dots f_n(x) = 0 \}$.

Ist keine Verwechslung möglich, wird $K((f_j)_{j \geq n})$ kurz mit $K(f_n)$ bezeichnet.

- c) Eine Familie $(M_i)_{i \in I}$ von Moduln heißt schwach lokal semi-t-nilpotent, wenn für jede Folge

$$M_{i_1} \xrightarrow{f_1} M_{i_2} \xrightarrow{f_2} M_{i_3} \xrightarrow{f_3} \dots, \quad i_k \in I, \quad i_k \neq i_l \text{ für } k \neq l,$$

von Homomorphismen f_j mit der zusätzlichen Bedingung, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ $K(f_n) \subseteq M_{i_n}$ ist, bereits $K(f_1) = M_{i_1}$ gilt.

1.2 Bemerkung

Offenbar folgt aus stark lokal semi-t-nilpotent lokal semi-t-nilpotent und aus lokal semi-t-nilpotent schwach lokal semi-t-nilpotent.

1.3 Beispiel

Es gibt einen Ring R und eine Familie $(M_i)_{i \in I}$ von direkt unzerlegbaren R -Moduln, so daß $(M_i)_{i \in I}$ schwach lokal semi-t-nilpotent, jedoch nicht lokal semi-t-nilpotent ist.

Beweis

Sei $R := \mathbb{Z}$, $I := \mathbb{N}$, $M_i := \mathbb{Z}/2^{n_i}\mathbb{Z}$, $n_i \in \mathbb{N}$, $(n_i)_{i \in I}$ nicht beschränkt.

Für eine Folge $(f_i)_{i \in I}$ von Homomorphismen $f_i : \mathbb{Z}/2^{n_i}\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2^{n_{i+1}}\mathbb{Z}$ mit $K(f_i) \subseteq \mathbb{Z}/2^{n_i}\mathbb{Z}$ kann o.E. f_i nicht injektiv vorausgesetzt werden.

Wir zeigen, daß für $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{N}$ für $\mathbb{Z}/2^{m_1}\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}/2^{m_2}\mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}/2^{m_3}\mathbb{Z}$ mit $f \neq 0$, g nicht injektiv, $\text{Ker}(f) \not\subseteq \text{Ker}(gf)$ gilt:

Weil $\text{Ker}(g) \neq 0$, $\text{Ker}(g) \subseteq \mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z}$, d.h. $\text{Ker}(g) \cap \text{Bi}(f) \neq 0$ ist, existiert ein $t \in \mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z}$ mit $t \notin \text{Ker}(f)$, $f(t) \in \text{Ker}(g)$, also $\text{Ker}(f) \subsetneq \text{Ker}(gf)$.

Weil $\mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z}$ noethersch ist, folgt nun die schwache lokale Semi-t-Nilpotenz von $(M_i)_{i \in I}$.

Offensichtlich jedoch ist diese Familie nicht lokal semi-t-nilpotent, da eine Folge von injektiven Nichtisomorphismen zu einer Teilfolge von $(M_i)_{i \in I}$ existiert.

#

1.4 Lemma

Sei $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ χ_o -quasistetig.

Dann ist $(M_i)_{i \in I}$ schwach lokal semi-t-nilpotent. Ist zusätzlich M direkt finit, so ist $(M_i)_{i \in I}$ stark lokal semi-t-nilpotent.

Beweis

Sei $M_{i_1} \xrightarrow{f_1} M_{i_2} \xrightarrow{f_2} M_{i_3} \xrightarrow{f_3} \dots$, $i_k \in I$, $i_k \neq i_j$ für $k \neq j$

eine Folge von Homomorphismen f_n . Da $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M_{i_n}$ direkter Summand in M , also gleichfalls χ_o -quasistetig ist, kann o.E. $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M_n$ mit $M_n := M_{i_n}$ gesetzt werden.

Sei $x \in M_1$. Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$ die Moduln $L_1 := xR$, $L_{n+1} := f_n(L_n)$. Die L_n sind zyklisch und in M_n enthalten. Weil M_n χ_o -quasistetig ist, gibt es einen Untermodul $\bar{L}_n$ von M_n , so daß $L_n \subseteq \bar{L}_n \subseteq M_n$ gilt. Offensichtlich haben wir mit $L := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \bar{L}_n$ einen χ_o -quasistetigen Modul. $f_n|_{L_n} : L_n \longrightarrow L_{n+1}$ läßt sich zu einem Homomorphismus $\bar{f}_n$ von $\bar{L}_n$ nach $\bar{L}_{n+1}$ fortsetzen.

Wir definieren nun $\bar{L}'_n := \{ l_n - \bar{f}_n(l_n) \mid l_n \in \bar{L}_n \}$. Es ist $\bar{L}'_n \cong \bar{L}_n$, und man rechnet ohne Mühe nach, daß $\bar{L}'_n \oplus \bar{L}_{n+1} = \bar{L}_n \oplus \bar{L}_{n+1}$ und auch

$\sum_{n \in \mathbb{N}} \bar{L}'_n = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \bar{L}'_n$ gilt. Somit ist

$L = (\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \bar{L}_{2n} \oplus \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \bar{L}'_{2n-1}) = (\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \bar{L}'_{2n} \oplus \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \bar{L}_{2n-1})$. $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \bar{L}'_{2n}$ und $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \bar{L}_{2n-1}$ sind χ_o -wesentlich erzeugte, direkte Summanden von L , d.h. $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \bar{L}'_n$ ist direkter Summand in L .

Sei jetzt zunächst M und damit L direkt finit. Wegen der Isomorphie $L = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \bar{L}'_n \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \bar{L}'_n$ gilt $L = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \bar{L}'_n$. Es existieren also $x_1 \in \bar{L}'_1, \dots, x_n \in \bar{L}'_n$, so daß $x = (x_1 - \bar{f}_1(x_1)) + \dots + (x_n - \bar{f}_n(x_n))$.

Wir haben $(x_1 - x) + \dots + (x_n - \bar{f}_{n-1}(x_{n-1})) - \bar{f}_n(x_n) = 0$. Hieraus ergibt sich $x = x_1$, $x_2 = \bar{f}_1(x_1)$, $\dots$, $x_n = \bar{f}_{n-1}(x_{n-1})$, $\bar{f}_n(x_n) = 0$. Weil x Element von L_1 ist, folgt $\bar{f}_n(x_n) = f_n(x_n) = f_n \dots f_1(x_1) = 0$, also $x \in K(f_1)$. Da x beliebig aus M_1 gewählt war, haben wir $K(f_1) = M_1$.

Sei jetzt M nicht unbedingt direkt finit, jedoch für alle $n \in \mathbb{N}$ $K(f_n) \subseteq M_n$. Wir zeigen wieder $L = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \bar{L}_n$: Weil $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \bar{L}_n$ direkter Summand in L ist, reicht es, hierfür $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \bar{L}_n \subseteq L$ zu beweisen:

Da $K(f_n) \subseteq M_n$, also $(K(f_n) \cap L_n) \subseteq L_n \subseteq \bar{L}_n$, $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} (K(f_n) \cap L_n) \subseteq \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \bar{L}_n = L$ gilt, ist dies mit $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} (K(f_n) \cap L_n) \subseteq \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \bar{L}_n$ gezeigt.

Sei $y \in (K(f_n) \cap L_n)$. Es existiert ein $n \leq m \in \mathbb{N}$ mit $f_m \dots f_n(y) = 0$, also $y = (y - f_n(y)) + (f_n(y) - f_{n+1} f_n(y)) + \dots + (f_{m-1} \dots f_n(y) - f_m \dots f_n(y)) \in \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \bar{L}_n$. $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \bar{L}_n = L$ ist damit bewiesen, und die Behauptung $K(f_1) = M$ folgt wie oben. #

Mit Hilfe des obigen Lemmas kann in gewisse Fällen von Zerlegungseigenschaften der M_i auf Zerlegungseigenschaften von M geschlossen werden.

1.5 Folgerung

Sei $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ X_0 -quasistetig und direkt finit, M_i habe die n -Substitutionseigenschaft, dann hat auch M die n -Substitutionseigenschaft.

Beweis

In ([13], Satz 7.3) wird für eine lokal semi- t -nilpotente Familie $(M_i)_{i \in I}$ von paarweise nicht isomorphen Moduln M_i mit der n -Substitutionseigenschaft gezeigt, daß $\bigoplus_{i \in I} M_i$ die n -Substitutionseigenschaft besitzt. Wird $(M_i)_{i \in I}$ stark lokal semi- t -nilpotent vorausgesetzt, so kann auf die Forderung der paarweisen Nichtisomorphie verzichtet werden. Der Beweis kann übernommen werden. ⁽¹⁾ #

Die kommenden Lemmata münden in Sätzen, die Beziehungen zwischen schwacher lokaler Semi- t -Nilpotenz und Annullatorbedingungen herstellen.

1.6 Definition und Lemma

Für ein Element x eines R -Moduls M sei x° der Rechtsannullator von x in R .

Für $x = \sum_{i=1}^n x_i \in \bigoplus_{i=1}^n M_i$, $x_i \in M_i$, ist $x^\circ = \bigcap_{i=1}^n x_i^\circ$.

Der Beweis ist einfach. #

1.7 Lemma

Sei $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Familie von quasistetigen Moduln und $(f_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Familie von Homomorphismen $f_{1,n}: M_n \longrightarrow M_{n+1}$. Dann gilt:

a) Es gibt eine Zerlegung $M_1 = D_{1,1} \oplus H_{1,1}$ mit $K(f_{1,1}) \subseteq H_{1,1}$.

(1) Zur Erleichterung für den Leser wird der Beweis im Anhang ausgeführt.

- b) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt mit $D_{1,n+1} := f_{1,n}(D_{1,n})$, $H_{1,n+1} := f_{1,n}(H_{1,n})$, daß $D_{1,n} \cap H_{1,n} = 0$ ist.
- c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $f_{1,n}|_{D_{1,n}} : D_{1,n} \longrightarrow D_{1,n+1}$ ein Isomorphismus.
- d) Für $n \geq 2$ existieren $H_{1,n} \subsetneq \bar{H}_{1,n} \subsetneq M_n$ und Homomorphismen $f_{2,n} : \bar{H}_{1,n} \longrightarrow \bar{H}_{1,n+1}$ mit $f_{2,n}|_{H_{1,n}} = f_{1,n}|_{H_{1,n}}$. Dabei ist $f_{1,1}(K(f_{1,1})) \subset K(f_{2,2})$.

Beweis

- a) gilt, weil M_1 quasistetig ist.
- b) gilt nach Konstruktion.
- c) Sei $0 \neq d_n \in D_{1,n}$, $f_{1,n}(d_n) = 0$, $d_1 \in D_{1,1}$, so daß $f_{1,n-1} \dots f_{1,1}(d_1) = d_n$. Somit ist $f_{1,n} \dots f_{1,1}(d_1) = 0$, d.h. $0 \neq d_1 \in K(f_{1,1}) \subset H_{1,1}$ was ein Widerspruch ist.
- e) Sei für $n \geq 2$ $H_{1,n} \subsetneq \bar{H}_{1,n} \subsetneq M_n$ und h_{n+1} die Projektion von $f_{1,n}(\bar{H}_{1,n})$ auf $\bar{H}_{1,n+1}$. Wir definieren $f_{2,n}$ durch $f_{2,n} : \bar{H}_{1,n} \xrightarrow{f_{1,n}} f_{1,n}(\bar{H}_{1,n}) \xrightarrow{h_{n+1}} \bar{H}_{1,n+1}$ und erhalten die Fortsetzungen von $f_{1,n}$. Klar gilt $f_{1,1}(K(f_{1,1})) \subset K(f_{2,2})$. ■

1.8 Lemma

Seien die Voraussetzungen wie in Lemma 1.7. Dann gibt es ein Schema

$$\begin{array}{ccccccc}
 M_1 & \xrightarrow{f_{1,1}} & M_2 & \xrightarrow{f_{1,2}} & M_3 & \xrightarrow{f_{1,3}} & \dots \xrightarrow{f_{1,n-1}} M_n \xrightarrow{f_{1,n}} M_{n+1} \xrightarrow{f_{1,n+1}} \dots \\
 \parallel & & \cup & & \cup & & \cup \\
 \widehat{D}_{1,1} & \longrightarrow & \widehat{D}_{1,2} & \longrightarrow & \widehat{D}_{1,3} & \longrightarrow & \dots \longrightarrow \widehat{D}_{1,n} \longrightarrow \widehat{D}_{1,n+1} \longrightarrow \dots \\
 \oplus & & \oplus & & \oplus & & \oplus \\
 H_{1,1} & \longrightarrow & H_{1,2} & \longrightarrow & H_{1,3} & \longrightarrow & \dots \longrightarrow H_{1,n} \longrightarrow H_{1,n+1} \longrightarrow \dots \\
 \\
 \bar{H}_{1,2} & \xrightarrow{f_{2,2}} & \bar{H}_{1,3} & \xrightarrow{f_{2,3}} & \dots \xrightarrow{f_{2,n-1}} & \bar{H}_{1,n} & \xrightarrow{f_{2,n}} \bar{H}_{1,n+1} \xrightarrow{f_{2,n+1}} \dots \\
 \parallel & & \cup & & \cup & & \cup \\
 \widehat{D}_{2,2} & \longrightarrow & \widehat{D}_{2,3} & \longrightarrow & \dots \longrightarrow & \widehat{D}_{2,n} & \longrightarrow \widehat{D}_{2,n+1} \longrightarrow \dots \\
 \oplus & & \oplus & & & \oplus & \oplus \\
 H_{2,2} & \longrightarrow & H_{2,3} & \longrightarrow & \dots \longrightarrow & H_{2,n} & \longrightarrow H_{2,n+1} \longrightarrow \dots \\
 \\
 & & & & & \vdots & \vdots \\
 & & & & & \vdots & \vdots \\
 \\
 & & & & & H_{n-1,n} & \longrightarrow H_{n-1,n+1} \longrightarrow \dots \\
 \\
 & & & & & \bar{H}_{n-1,n} & \xrightarrow{f_{n,n}} \bar{H}_{n-1,n+1} \xrightarrow{f_{n,n+1}} \dots \\
 & & & & & \parallel & \cup \\
 & & & & & \widehat{D}_{n,n} & \longrightarrow \widehat{D}_{n,n+1} \longrightarrow \dots \\
 & & & & & \oplus & \oplus \\
 & & & & & H_{n,n} & \longrightarrow H_{n,n+1} \longrightarrow \dots \\
 & & & & & \cup & \cup \\
 & & & & & \vdots & \vdots
 \end{array}$$

für welches gilt:

- a) Für $n \in \mathbb{N}$ ist $M_1 = D_{1,1} \oplus H_{1,1}$, $K(f_{1,1}) \subseteq H_{1,1}$, $D_{1,n+1} = f_{1,n}(D_{1,n})$,
 $H_{1,n+1} = f_{1,n}(H_{1,n})$, $D_{1,n} \cap H_{1,n} = 0$, $f_{1,n}|_{D_{1,n}}: D_{1,n} \longrightarrow D_{1,n+1}$ ist ein Isomor-
 phismus und für $k, n \in \mathbb{N}$
 $H_{k,k+n} \subseteq \bar{H}_{k,k+n} \subseteq M_{k+n}$, $f_{k+1,k+n}|_{H_{k,k+n}} = f_{k,k+n}|_{H_{k,k+n}}$,
 $\bar{H}_{k,k+1} = H_{k+1,k+1} \oplus D_{k+1,k+1}$, $K(f_{k+1,k+1}) \subseteq H_{k+1,k+1}$, $D_{k+1,k+n+1} = f_{k+1,k+n}(D_{k+1,k+n})$,
 $H_{k+1,k+n+1} = f_{k+1,k+n}(H_{k+1,k+n})$, $f_{k+1,k+n}|_{D_{k+1,k+n}}: D_{k+1,k+n} \longrightarrow D_{k+1,k+n+1}$ ist ein
 Isomorphismus, $D_{k+1,k+n} \cap H_{k+1,k+n} = 0$, $f_{k,k}(K(f_{k,k})) \subseteq K(f_{k+1,k+1}) \subseteq H_{k+1,k+1}$.
- b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\sum_{i=1}^n D_{i,n} + H_{n,n} = \bigoplus_{i=1}^n D_{i,n} \oplus H_{n,n}$.
- c) Für alle $k, n \in \mathbb{N}$, $x \in K(f_{k,k})$ gilt $f_{k,k+n} \dots f_{k,k}(x) = f_{k+n,k+n} f_{k+n-1,k+n-1} \dots f_{k,k}(x)$.
- d) Sei π_1 die Projektion von M_1 auf $H_{1,1}$, p_1 jene auf $D_{1,1}$ und für $k \in \mathbb{N}$
 π_{k+1} die Projektion von $\bar{H}_{k,k+1}$ auf $H_{k+1,k+1}$, p_{k+1} jene auf $D_{k+1,k+1}$ und eine
 Folge $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Homomorphismen $g_k: H_{k,k} \longrightarrow H_{k+1,k+1}$ durch
 $g_k: H_{k,k} \xrightarrow{f_{k,k}} H_{k,k+1} \subseteq \bar{H}_{k,k+1} \xrightarrow{\pi_{k+1}} H_{k+1,k+1}$ definiert. Dann ist $K(g_k) \subseteq H_{k,k}$.
- e) Sei $x \in M_1$, $x = x_{1,1} + y_{1,1}$ mit $x_{1,1} = p_1(x)$, $y_{1,1} = \pi_1(x)$, und für $k \in \mathbb{N}$
 $f_{k,k}(y_{k,k}) = x_{k+1,k+1} + y_{k+1,k+1}$ mit $x_{k+1,k+1} = p_{k+1}(f_{k,k}(y_{k,k}))$, $y_{k+1,k+1} = \pi_{k+1}(f_{k,k}(y_{k,k}))$.
 Dann ist für $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$
 $f_{1,n} \dots f_{1,1}(x) = f_{1,n} \dots f_{1,1}(x_{1,1}) + f_{2,n} \dots f_{2,2}(x_{2,2}) + \dots + f_{k,n} \dots f_{k,k}(x_{k,k}) + f_{k,n} \dots f_{k,k}(y_{k,k})$,
 wobei $y_{k+1,k+1} = g_k \dots g_1(y_{1,1})$.
- f) Ist für $x \in M_1$, $k \in \mathbb{N}$ $g_k \dots g_1(y_{1,1}) = 0$, so sind für $k+1 \leq n \in \mathbb{N}$ die Rechts-
 annullatoren von $f_{1,n} \dots f_{1,1}(x)$ gleich.

Beweis

Die Existenz des Schemas und a) folgt mit dem vorangehenden Lemma und In-
 duktion.

- b) gilt nach Konstruktion und weil für $k, n \in \mathbb{N}$ aus $D_{k,k+n} \cap H_{k,k+n} = 0$ auch
 $D_{k,k+n} \cap \bar{H}_{k,k+n} = 0$ folgt.
- c) gilt, da für alle $k \in \mathbb{N}$ $f_{k,k}(K(f_{k,k})) \subseteq K(f_{k+1,k+1}) \subseteq H_{k+1,k+1}$ ist.
- d) Sei $0 \neq x \in H_{k,k}$. Weil $K(f_{k,k}) \subseteq H_{k,k}$ ist, existiert ein $r \in R$, so daß
 $0 \neq xr \in K(f_{k,k})$ gilt. Somit ist $f_{k,k+n} \dots f_{k,k}(xr) = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und wegen
 c) dann auch $f_{k+n,k+n} \dots f_{k,k}(xr) = 0$.
 Es ist $f_{k+j,k+j} \dots f_{k,k}(xr) \in K(f_{k+j+1,k+j+1}) \subseteq H_{k+j+1,k+j+1}$ für $0 \leq j \leq n$, d.h. wir ha-
 ben $f_{k+n,k+n} \dots f_{k,k}(xr) = g_{k+n} \dots g_k(xr) = 0$ und die Behauptung ist bewiesen.
- e) Beweis durch Induktion über k für $1 \leq k \leq n$:
 Induktionsanfang: $f_{1,n} \dots f_{1,1}(x) = f_{1,n} \dots f_{1,1}(x_{1,1}) + f_{1,n} \dots f_{1,1}(y_{1,1})$ ist klar.
 Sei die Behauptung bereits für $k-1$ bewiesen.

Wegen $f_{k-1,k-1}(y_{k-1,k-1}) = x_{k,k} + y_{k,k}$, $(x_{k,k} + y_{k,k}) \in H_{k-1,k} \subset \bar{H}_{k-1,k}$, sowie $f_{k,j}|_{H_{k-1,j}} = f_{k-1,j}|_{H_{k-1,j}}$ für $k \leq j$ folgt

$$f_{k-1,n} \dots f_{k-1,k-1}(y_{k-1,k-1}) = f_{k-1,n} \dots f_{k-1,k}(x_{k,k} + y_{k,k}) = f_{k,n} \dots f_{k,k}(x_{k,k} + y_{k,k}) = f_{k,n} \dots f_{k,k}(x_{k,k}) + f_{k,n} \dots f_{k,k}(y_{k,k})$$

und der Induktionsbeweis ist beendet.

Es bleibt $y_{k+1,k+1} = g_k \dots g_1(y_{1,1})$ zu zeigen. Wegen $y_{k+1,k+1} = \pi_{k+1} f_{k,k} \dots \pi_2 f_{1,1}(y_{1,1})$ und Konstruktion der g_j ist das klar.

- f) Ist $g_k \dots g_1(y_{1,1}) = 0$, so folgt wegen e) für $k+1 \leq n \in \mathbb{N}$:

$$f_{1,n} \dots f_{1,1}(x) = f_{1,n} \dots f_{1,1}(x_{1,1}) + f_{2,n} \dots f_{2,2}(x_{2,2}) + \dots + f_{k+1,n} \dots f_{k+1,k+1}(x_{k+1,k+1}),$$

wobei $x_{j,j} \in D_{j,j}$ für $1 \leq j \leq (k+1)$. Die $f_{i,n}|_{D_{i,n}}$ sind Isomorphismen, d.h.

$$f_{1,n} \dots f_{1,1}(x_{1,1})^\circ = f_{1,k+1} \dots f_{1,1}(x_{1,1})^\circ, \dots, f_{k+1,n} \dots f_{k+1,k+1}(x_{k+1,k+1})^\circ = f_{k+1,k+1}(x_{k+1,k+1})^\circ.$$

Da für $(k+1) \leq n \sum_{i=1}^{k+1} D_{i,n+1} = \bigoplus_{i=1}^{k+1} D_{i,n+1}$, $f_{i,n} \dots f_{i,1}(x_{i,1}) \in D_{i,n+1}$ für $1 \leq i \leq k+1$ gilt, ergibt sich die Behauptung mit Lemma 1.6. #

Die zwei folgenden Sätze sind wichtige Folgerungen aus dem obigen Lemma.

1.9 Satz

Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine schwach lokal semi-t-nilpotente Familie von quasistetigen Moduln, und $M_{i_1} \xrightarrow{f_1} M_{i_2} \xrightarrow{f_2} M_{i_3} \xrightarrow{f_3} \dots$, $i_k \in I$, $i_k \neq i_l$ für $k \neq l$, eine Folge von Homomorphismen f_j . Dann gibt es für alle $x \in M_{i_1}$ ein $n \in \mathbb{N}$, so daß

$$f_n \dots f_1(x)^\circ = f_m \dots f_1(x)^\circ \text{ für alle } m \geq n.$$

Beweis

Die Folge $(H_{k,k})_{k \in \mathbb{N}}$ aus 1.8 d) ist auch schwach lokal semi-t-nilpotent. Die Behauptung folgt somit aus 1.8 d) und f). #

1.10 Definition ([15], p.3.66)

Eine Familie $(M_i)_{i \in I}$ von Moduln erfüllt die Annulatorbedingung A, falls für jede Wahl $x_n \in M_{i_n}$ ($n \in \mathbb{N}$, $i_n \in I$ disjunkt) mit aufsteigenden Annulatoren $(x_n^\circ)_{n \in \mathbb{N}}$, diese Folge stationär wird.

1.11 Satz

Sei $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, alle M_i quasistetig und M_i -injektiv für $i \neq j$.

Dann ist $(M_i)_{i \in I}$ genau dann schwach lokal semi-t-nilpotent, wenn $(M_i)_{i \in I}$ die Annulatorbedingung A erfüllt.

Beweis

$(M_i)_{i \in I}$ genüge zunächst A. Sei $M_{i_1} \xrightarrow{f_1} M_{i_2} \xrightarrow{f_2} M_{i_3} \xrightarrow{f_3} \dots$ mit $i_k \neq i_l$ für $k \neq l$, eine Folge von Homomorphismen f_n mit $K(f_n) \subseteq M_{i_n}$. Sei $x \in M_{i_1}$. Wir setzen $x_1 := x$, $x_{n+1} := f_n \dots f_1(x)$. Offensichtlich ist dann $x_n^0 \subseteq x_{n+1}^0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so daß $x_m^0 = x_{mk}^0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Somit ist $x_m R \cap K(f_m) = 0$, d.h. $x_m = 0$.

Sei jetzt $(M_i)_{i \in I}$ schwach lokal semi-t-nilpotent, und für $n \in \mathbb{N}$, $i_n \in I$ disjunkt, $x_n \in M_{i_n}$, $x_1^0 \subseteq x_2^0 \subseteq x_3^0 \subseteq \dots$. Die kanonischen Abbildungen

$f_n: x_n R \longrightarrow x_{n+1} R$, $x_n r \longmapsto x_{n+1} r$ lassen sich zu Homomorphismen

$\bar{f}_n: \overline{x_n R} \longrightarrow \overline{x_{n+1} R}$, $x_n R \subseteq \overline{x_n R} \subseteq M_{i_n}$, fortsetzen.

$(\overline{x_n R})_{n \in \mathbb{N}}$ ist schwach lokal semi-t-nilpotent; die Behauptung folgt aus Satz 1.9. #

B.Müller und S.Rizvi beweisen in [15], daß für eine Familie $(M_i)_{i \in I}$ von Moduln mit M_i quasistetig, direkt unzerlegbar und M_i -injektiv für $i \neq j$, $(M_i)_{i \in I}$ genau dann lokal semi-t-nilpotent ist, wenn $(M_i)_{i \in I}$ die Annulatorbedingung A erfüllt. Weil Monomorphismen zwischen M_i und M_j für $i \neq j$ schon Isomorphismen sind, folgt dieses Resultat aus Satz 1.11.

Nun steuern wir eine Charakterisierung gewisser Haradamoduln an. Für den Beweis benötigen wir Satz 1.9 und die Lemmata 1.12 bis 1.14.

1.12 Lemma

Sei M endlich wesentlich erzeugt. Dann ist M nicht unendliche direkte Summe von nicht trivialen Untermoduln.

Der Beweis ist elementar. #

1.13 Lemma

Sei V ein X_0 -quasistetiger Modul, $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, $|I| \geq X_0$, $M_i \cong V$ für alle $i \in I$, sowie $(M_i)_{i \in I}$ eine schwach lokal semi-t-nilpotente Familie. Dann existiert ein großer, lokal-direkter Summand $\bigoplus_{j \in J} V_j$ in V mit uniformen Summanden V_j .

Beweis

Wir zeigen im ersten Schritt, daß jeder von Null verschiedene, zyklisch wesentlich erzeugte, direkte Summand von V einen von Null verschiedenen uniformen Untermodul enthält:

Sei $0 \neq T_0$ zyklisch wesentlich erzeugt, direkter Summand in V , $T_0 \oplus H \cong V$. Die Annahme, T_0 enthalte keinen nichttrivialen, uniformen Untermodul wird zum Widerspruch geführt:

Es existiert $0 \neq y_1 \in T_0$ mit $y_1 R \not\subseteq T_0$, d.h. $y_1 R \subseteq \overline{y_1 R} \subseteq T_0$, $\overline{y_1 R} \oplus T_1 \cong T_0$, $T_1 \neq 0$. Weiter existiert ein $0 \neq y_2 \in T_1$, $y_2 R \subseteq \overline{y_2 R} \subseteq T_1$, $0 \neq T_2 \subseteq T_1$ mit $T_1 = \overline{y_2 R} \oplus T_2$. Induktiv finden wir für alle $n \in \mathbb{N}$ $0 \neq y_n \in T_0$, $0 \neq T_n \subseteq T_{n-1}$ mit $y_n R \subseteq \overline{y_n R} \subseteq T_{n-1}$, $T_{n-1} = \overline{y_n R} \oplus T_n$. Sei $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \overline{y_i R} \subseteq L \subseteq T_0$, $L \oplus K \cong T_0$.

Das obige Lemma besagt, daß $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \overline{y_i R}$ sogar echt in L enthalten ist.

Es ist $\bigoplus_{i=1}^n \overline{y_i R} \oplus (T_n \cap L) = L$. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ Homomorphismen $f_n: V \longrightarrow V$ durch $f_n|_H \oplus K = 0$, $f_n|_L \equiv$ Projektion von L auf $(T_n \cap L)$ mit Kern $\bigoplus_{i=1}^n \overline{y_i R}$. Offensichtlich gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ $K(f_n) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \overline{y_i R} \oplus H \oplus K \subsetneq V$, und dies ist der angekündigte Widerspruch.

Im zweiten Schritt zeigen wir die Behauptung des Lemmas:

Mit Hilfe des Lemmas von Zorn existiert ein maximaler lokal-direkter Summand $\bigoplus_{j \in J} V_j$, V_j uniform, von V . Dieser lokal-direkte Summand ist sogar groß in V , denn für $0 \neq x \in V$, $xR \cap \bigoplus_{j \in J} V_j = 0$, folgt mit $xR \subseteq \overline{xR} \subseteq V$ $\overline{xR} \cap \bigoplus_{j \in J} V_j = 0$, und $\overline{xR}$ enthält einen uniformen Untermodul V_0 . Sei $V_0 \subseteq \overline{V_0} \subseteq \overline{xR}$. Dann ist auch $\overline{V_0} \cap \bigoplus_{j \in J} V_j = 0$ und $\overline{V_0} \oplus \bigoplus_{j \in J} V_j$ wieder lokal-direkter Summand, bestehend aus uniformen Summanden. Dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von $\bigoplus_{j \in J} V_j$. $\#$

Für eine schwach lokal semi-t-nilpotente Familie von paarweise isomorphen, quasi-stetigen Moduln kann eine noch stärkere Aussage formuliert werden.

1.14 Lemma

Sei V ein quasistetiger Modul, $(M_i)_{i \in I}$, $|I| \geq \aleph_0$, $M_i \cong V$, eine schwach lokal semi-t-nilpotente Familie. Dann ist V direkte Summe von direkt unzerlegbaren Untermoduln.

Beweis

Mit Lemma 1.13 gibt es einen lokal-direkten Summanden $\bigoplus_{j \in J} V_j \subseteq V$, V_j uniform, von V . Wir zeigen, daß dieser Untermodul bereits ganz V ist:

Angenommen, es existiert ein $x_1 \in V$, $x_1 \notin \bigoplus_{j \in J} V_j$. Dann gibt es ein $r \in R$, so daß $0 \neq x_1 r \in \bigoplus_{j \in F_1} V_j$, $F_1 \subset J$ endlich. Sei $\bigoplus_{j \in F_1} V_j \oplus L_1 \cong V$, $x_1 = v_1 + x_2$ in dieser Zerlegung, und π_1 die Projektion von V auf L_1 mit Kern $\bigoplus_{j \in F_1} V_j$. Sicherlich ist $x_2 \notin \bigoplus_{j \in J} V_j$, $\pi_1(x_1) = x_2$, $\pi_1(x_1 r) = 0$, d.h. $x_1^0 \not\subseteq x_2^0$. Wir fahren fort und finden ein $t \in R$,

$F_2 \subset J$ endlich, $0 \neq x_2 t \in \bigoplus_{j \in F_2} V_j$, $L_2 \subset V$, so daß $\bigoplus_{j \in F_2} V_j \oplus L_2 = V$. Ist $x_2 = v_2 + x_3$ in dieser Zerlegung, so gilt wieder $x_3 \in \bigoplus_{j \in J} V_j$. Sei π_2 die Einschränkung auf L_1 der Projektion von V auf L_2 . Es ist $\pi_2(x_2) = x_3$, $x_2^0 \subsetneq x_3^0$. Induktiv finden wir für $i \in \mathbb{N}$ direkte Summanden L_i in V , Elemente x_i in L_i , sowie Homomorphismen $f_i : L_i \longrightarrow L_{i+1}$ mit $f_i(x_i) = x_{i+1}$, $x_i^0 \subsetneq x_{i+1}^0$. Dies ist ein Widerspruch zu Satz 1.9. $\square$

1.15 Satz

Sei V ein stetiger Modul, $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, $|I| \geq \aleph_0$, $M_i \cong V$. Dann sind äquivalent:

- a) $(M_i)_{i \in I}$ ist schwach lokal semi-t-nilpotent
- b) M ist ein Haradamodul

Beweis

- a) $\Rightarrow$ b) Wegen Lemma 1.14 ist $M_i = \bigoplus_{j \in J} M_{i,j}$, $M_{i,j}$ direkt unzerlegbar, $M_{i,k} \cong M_{i,j}$ für $i \in I$, $k, j \in J$. Die $M_{i,j}$ besitzen als stetige Moduln wegen ([8], Th. 7.1) und ([21], Th.2,3) die endliche Austauscheigenschaft und haben dann wegen ([20], Prop.1) einen lokalen Endomorphismenring. Da die $M_{i,j}$ uniform sind und Monomorphismen zwischen zwei Summanden von M_i wegen 0.4 bereits Isomorphismen sind, ist $(M_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ lokal semi-t-nilpotent. Ein bekanntes Ergebnis (siehe z.B. ([25], Satz 3.2) besagt nun, daß M ein Haradamodul ist.
- b) $\Rightarrow$ a) Weil M Haradamodul ist, besitzt M_i eine direkte Zerlegung $M_i = \bigoplus_{j \in J} M_{i,j}$ in uniforme Untermoduln $M_{i,j}$ und $(M_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ ist lokal semi-t-nilpotent. Mit Hilfe des König-Graph Lemmas folgt die schwache lokale Semi-t-Nilpotenz von $(M_i)_{i \in I}$. $\square$

§2 (Quasi)stetigkeit von direkten Summen

Im folgenden wird die Frage beantwortet, wann direkte Summen von (quasi)stetigen Moduln diese Eigenschaft weiterhin besitzen. Hierbei spielt neben einer Injektivitätsbedingung wieder eine Annulatorbedingung eine wichtige Rolle.

1.16 Definition ([15], p. 366)

Eine Familie $(M_i)_{i \in I}$ von Moduln erfüllt die Annulatorbedingung B , falls für jede Wahl $m_i \in M_i$ mit der zusätzlichen Bedingung, daß es ein $j \in I$ gibt, so daß $m_j^0 \subset m_i^0$ für alle $i \in I$, das Netz $\bigcap_{i \in F} m_i^0$ ($F \subset I$, $|F| < \infty$) stationär wird.

1.17 Definition

Eine Familie $(M_i)_{i \in I}$ von Moduln erfüllt die innere Injektivitätsbedingung I , falls für alle $J_1, J_2 \subset I$, $J_1 \cap J_2 = \emptyset$ $\bigoplus_{i \in J_1} M_i \oplus \bigoplus_{i \in J_2} M_i$ -injektiv ist.

1.18 Bemerkung

Bekannterweise reicht es für I zu zeigen: für alle $j \in I$ ist $\bigoplus_{i \neq j} M_i$ M_j -injektiv.

Einen Zusammenhang zwischen den obigen Definitionen stellt das folgende, auf Nakayama zurückgehende Lemma her.

1.19 Lemma ([15], Lemma 1)

$(M_i)_{i \in I}$ erfüllt die innere Injektivitätsbedingung genau dann, wenn M_i M_j -injektiv für $i \neq j$ ist und $(M_i)_{i \in I}$ die Annulatorbedingung B erfüllt.

In gewissen Fällen ist eine Zerlegung $M_i = M_i^1 \oplus M_i^2$ möglich und I bleibt für $(M_i^1)_{(i,j) \in L \times \{1,2\}}$ erhalten.

1.20 Lemma

Sei $M = \bigoplus_{i \in I} M_i = \bigoplus_{i \in I} M_i^1 \oplus \bigoplus_{i \in I} M_i^2$, $M_i = M_i^1 \oplus M_i^2$, M_i quasistetig. $(M_i)_{i \in I}$ erfüllt genau dann I , wenn $(M_i^1)_{(i,j) \in L}$, $L := I \times \{1,2\}$, I erfüllt.

Beweis

" $\Rightarrow$ " Sei $(i_0, e_0) \in L$, o.E. $e_0 = 1$. Nach Voraussetzung ist $\bigoplus_{i \neq i_0} M_i$ M_{i_0} -injektiv und da $M_{i_0}^1$ direkter Summand in M_{i_0} ist, auch $M_{i_0}^1$ -injektiv. Weil M_{i_0} quasistetig

ist, ist auch $M_0^2 \rightarrow M_0^1$ - injektiv und somit $\bigoplus_{(i,j) \neq (i_0,0)} M_i^1 \rightarrow M_{i_0}^1$ - injektiv. Mit Bemerkung 1.18 folgt die Behauptung. Die andere Richtung gilt immer. $\square$

1.21 Lemma

Sei $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, M_i quasistetig, $X \subset M$, $X \cap \bigoplus_{i \in I} \tilde{M}_i = 0$, $\tilde{M}_i \subset M_i$.
Dann existieren $\tilde{M}_i \subset M_i^1 \subset M_i$, so daß $X \oplus \bigoplus_{i \in I} M_i^1 \subset M$ gilt.

Beweis

Sei $H = \{(M_i^1)_{i \in I} \mid \tilde{M}_i \subset M_i^1 \subset M_i, X \cap \bigoplus_{i \in I} M_i^1 = 0\}$. Durch $(M_i^\alpha)_{i \in I} \leq (M_i^\beta)_{i \in I} : \Leftrightarrow M_i^\alpha \subset M_i^\beta$ für alle $i \in I$, wird eine Ordnung auf H definiert. Mit Hilfe des Lemmas von Zorn findet man ein maximales Element $(M_i^1)_{i \in I} \in H$. Man zeigt ohne Mühe, daß $X \oplus \bigoplus_{i \in I} M_i^1 \subset M$ gilt. Zu M_i^1 existiert $\bar{M}_i^1 \subset M_i$. Wegen der Maximalität von $(M_i^1)_{i \in I}$ ist also $M_i^1 = \bar{M}_i^1$. $\square$

Die folgenden zwei Sätze werden in [15] unter der zusätzlichen Voraussetzung der direkten Unzerlegbarkeit der Summanden M_i bewiesen. Dabei wird für 1.23 die Theorie der Haradamoduln benutzt, was für unseren Beweis nicht möglich ist.

1.22 Satz

Für $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ sind äquivalent:

- 1) M ist quasistetig.
- 2) Alle M_i sind quasistetig, und $(M_i)_{i \in I}$ erfüllt die innere Injektivitätsbedingung I.
- 3) Alle M_i sind quasistetig, M_j -injektiv für $i \neq j$, und $(M_i)_{i \in I}$ erfüllt die Annulatorbedingung B.

Beweis

(2 $\Leftrightarrow$ 3) gilt wegen Lemma 1.19.

1 $\Rightarrow$ 2 : Klar sind alle M_i quasistetig. I gilt wegen 0.4.

2 $\Rightarrow$ 1 : Wir zeigen im ersten Schritt: Zu $X \cap \bigoplus_{i \in I} \tilde{M}_i = 0$, $\tilde{M}_i \subset M_i$, $X \subset M$ existieren $X \subset \bar{X} \subset M$, $\tilde{M}_i \subset M_i^1 \subset M_i$, so daß $\bar{X} \oplus \bigoplus_{i \in I} M_i^1 = M$ gilt. Wegen des vorangehenden Lemmas existieren $\tilde{M}_i \subset M_i^1 \subset M_i$ mit $X \oplus \bigoplus_{i \in I} M_i^1 \subset M$.

Sei nun $M_i = M_i^1 \oplus M_i^2$, $M = \bigoplus_{i \in I} M_i^1 \oplus \bigoplus_{i \in I} M_i^2$ und

π_1 die Projektion von M auf $\bigoplus_{i \in I} M_i^1$ mit Kern $\bigoplus_{i \in I} M_i^2$,

π_2 die Projektion von M auf $\bigoplus_{i \in I} M_i^2$ mit Kern $\bigoplus_{i \in I} M_i^1$.

Weil $\bigoplus_{i \in I} M_i^1 \cap X = 0$ ist, ist $\pi_2|_X$ ein Monomorphismus, also $X \cong \pi_2(X)$.

Wegen $X \oplus \bigoplus_{i \in I} M_i^1 \subseteq M$, gilt $\pi_2(X) \subseteq \bigoplus_{i \in I} M_i^2$. Die Abbildung

$\pi_2(X) \ni \pi_2(x) \longmapsto \pi_1(x) \in \bigoplus_{i \in I} M_i^1$ ist wohldefiniert und läßt sich nach Voraussetzung und Lemma 1.20 zu einem Homomorphismus

$f: \bigoplus_{i \in I} M_i^2 \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i^1$ fortsetzen. Wir definieren $\bar{X} := \{ z + f(z) \mid z \in \bigoplus_{i \in I} M_i^2 \}$,

und rechnen nach, daß $X \subseteq \bar{X}$, $\bar{X} \oplus \bigoplus_{i \in I} M_i^1 = M$ gilt.

Wir zeigen nun die Quasistetigkeit von M im zweiten Schritt:

Seien X und Y direkte Summanden in M mit $X \cap Y = 0$. Zu $X \subseteq M$ existieren nach dem ersten Schritt Zerlegungen $M_i = M_i^1 \oplus M_i^2$, $X \subseteq \bar{X}$ mit $\bar{X} \oplus \bigoplus_{i \in I} M_i^1 = M$.

Offenbar ist dann $X = \bar{X}$ und wegen des Isomorphiesatzes $X \cong \bigoplus_{i \in I} M_i^2$. Sei $X = \bigoplus_{i \in I} X_i$,

$X_i \cong M_i^2$, d.h. $M = \bigoplus_{i \in I} X_i \oplus \bigoplus_{i \in I} M_i^1$. Natürlich erfüllt auch diese Summe die innere

Injektivitätsbedingung, es ist $Y \cap \bigoplus_{i \in I} X_i = 0$, und wie im ersten Schritt folgt, daß

es $Y \subseteq \bar{Y} \subseteq M$, ${}^1M_i^1 \subseteq M_i^1$ gibt, so daß $\bar{Y} \oplus X \oplus \bigoplus_{i \in I} {}^1M_i^1 = M$. Wieder ist $Y = \bar{Y}$

und der Beweis ist beendet. **

1.23 Satz

Für $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ sind äquivalent:

- 1) M ist stetig.
- 2) M ist quasistetig, alle M_i sind stetig.
- 3) Alle M_i sind stetig und $(M_i)_{i \in I}$ erfüllt die innere Injektivitätsbedingung I.
- 4) Alle M_i sind stetig, M_i - injektiv für $i \neq j$ und $(M_i)_{i \in I}$ erfüllt die Annullatorbedingung B.

Beweis

(3 $\Leftrightarrow$ 4) gilt wegen Lemma 1.19.

(1 $\Rightarrow$ 2) ist klar.

(2 $\Leftrightarrow$ 4) gilt wegen Satz 1.22.

(2 $\Rightarrow$ 1) : Zunächst sei bemerkt, daß wegen ([14], Th.13) bereits alle endlichen Teilsummen von $\bigoplus_{i \in I} M_i$ stetig sind, und es wegen ([14], Lemma 11) reicht, zu zeigen, daß für $C := \bigoplus_{i \in I} C_i \subseteq M$, $C_i \cong M_i$ (d.h. $C \cong M$) schon $C = M$ gilt.

Sei $x \in M$, $x \notin C$. Es existiert ein $i_1 \in I$, so daß die i_1 -te Komponente x_{i_1} von x in $\bigoplus_{i \in I} M_i$ nicht aus C ist. Klar ist $M_{i_1} \cap C \subseteq M_{i_1}$. Sei

$M_{i_1} \cap C \subseteq V_1 \subseteq C$, $V_1 \subseteq \bar{V}_1 \subseteq M$. Weil $M_{i_1} \cap C \subseteq V_1 \subseteq C$, $M_{i_1} \cap C \subseteq M_{i_1} \subseteq M$,

$M_{i_1} \cap C \subseteq \bar{V}_1$, $M \cong C$ gilt, haben wir mit ([14], Th.4) $V_1 \cong M_{i_1} \cong \bar{V}_1$.

Da $\bar{V}_1$ stetig ist, folgt $V_1 = \bar{V}_1$. Nun ergibt sich, da M quasistetig ist und

$V_1 \subseteq M$, $V_1 \cap \bigoplus_{i \neq i_1} M_i = 0$, $V_1 \oplus \bigoplus_{i \neq i_1} M_i \subseteq M$ gilt, daß $V_1 \oplus \bigoplus_{i \neq i_1} M_i = M$ ist.

Sei $x_1 = v_1 + y_1$, $v_1 \in V_1$, $y_1 \in \bigoplus_{i \neq i_1} M_i$. Sicher ist $y_1 \notin C$, d.h. es existiert ein $l \ni i_2 \neq i_1$, so daß die i_2 -te Komponente x_2 von y_1 in $\bigoplus_{i \neq i_1} M_i$ nicht aus C ist. x_2 ist das Bild von x_1 der Projektion auf M_{i_2} bezüglich der Zerlegung $V_1 \oplus \bigoplus_{i \neq i_1} M_i$. Wir sehen also, daß $x_1^\circ \subseteq x_2^\circ$. Da es ein $r \in R$ gibt mit $0 \neq x_1 r \in M_{i_1} \cap C$, ist diese Inklusion sogar echt.

Sei jetzt wie oben $(M_{i_1} \oplus M_{i_2}) \cap C \subseteq V_2$, $V_2 \subseteq C$, $V_2 \subseteq M$,

$V_2 \oplus \bigoplus_{i \neq i_1, i_2} M_i = M$, $x_2 = v_2 + y_2$, $v_2 \in V_2$, $y_2 \in \bigoplus_{i \neq i_1, i_2} M_i$. Es ist $y_2 \notin C$, und wir finden ein $i_3 \in I \setminus \{i_1, i_2\}$, $x_3 \in M_{i_3}$ mit $x_2^\circ \subsetneq x_3^\circ$. Sukzessive konstruieren wir eine aufsteigende Folge $x_1^\circ \subsetneq x_2^\circ \subsetneq x_3^\circ \subsetneq \dots$, $x_n \in M_{i_n}$ ($i_n \in I$ disjunkt) im Widerspruch zu Lemma 1.4 und Satz 1.11. #

1.24 Folgerung

Ein projektiver, quasistetiger Modul M über einem rechts 1-stetigen Austauschring R ist stetig.

Beweis

Wegen ([21], Th.1) ist $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, $M_i \subseteq R_R$. Die M_i sind also stetig, und mit Satz 1.23 folgt die Behauptung. #

Beispiele für rechts 1-stetige Austauschringe sind unter anderem reguläre Ringe und rechts stetige, also insbesondere rechts injektive Ringe.

1.25 Folgerung

Sei R ein beliebiger Ring, M ein projektiver, quasistetiger R -Modul. Dann ist M genau dann stetig, wenn M χ_0 -stetig ist.

Beweis

Wegen Kaplansky ist $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, M_i abzählbar erzeugt. Ist M_i quasistetig, χ_0 -stetig, so auch stetig. Mit 1.23 folgt die Behauptung. #

1.26 Beispiel

Für eine Folge R_n von Ringen sei $R := \prod_{n \in \mathbb{N}} R_n$ der Produktring. Sei $\mathbb{N} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_i$, $|L_i| = \infty$, $M_i := \prod_{j \in L_i} R_j$. Offensichtlich sind die R -Moduln M_i nicht direkte Summe von direkt unzerlegbaren Untermoduln sowie $\text{Hom}_R(M_i', \bigoplus_{k \neq i} M_k) = 0$ für jeden Untermodul M_i' von M_i . Sind die R_n alle quasistetig, nicht stetig (z.B. $R_n = \mathbb{Z}$),

bzw. stetig, nicht quasiinjektiv ([5], Ex. 13.8) so haben die M_i dieselben Eigenschaften. Die zurückliegenden Sätze beweisen die Quasistetigkeit bzw. Stetigkeit für $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M_i$. ■

Kapitel 2

Direkte Endlichkeit von χ_o -quasistetigen Moduln

2.1 Lemma

Sei M χ_o -quasistetig, $A \in \chi_o(M)$, $\chi_o A \subsetneq M$.

Dann ist $\overline{\chi_o A} \cong \overline{\chi_o A} \oplus \bar{A} \cong \overline{\chi_o A} \oplus \overline{\chi_o A}$, also $M \cong M \oplus \bar{A} \cong M \oplus \overline{\chi_o A}$.

Insbesondere gilt: Ist $A \cong A' \subsetneq M$ bzw. $B, B' \subsetneq M$, $B \cong B' \cong \chi_o A$, so ist $\bar{A} \cong \bar{A}'$ bzw. $\bar{B} \cong \bar{B}'$.

Beweis

Sei $B := \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_i \subsetneq M$, $A_i \cong A$, $B = B_1 \oplus B_2 \oplus B_3 \oplus A_0$, $B \cong B_1 \cong B_1 \oplus A_0 \cong B_1 \oplus B_i$ für $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $A_0 \cong A$.

Wegen 0.6, 0.7 ist $\overline{B_1 \oplus B_2} \cong \bar{B}_3 \cong \overline{B_3 \oplus A_0} \cong \bar{B}_3 \oplus \bar{A}_0 \cong \bar{B}_1 \cong \bar{B}_2$ und folglich $\bar{B} \cong \bar{B}_1 \oplus \bar{B}_2 \oplus \bar{B}_3 \oplus \bar{A}_0 \cong \overline{B_1 \oplus B_2} \oplus \bar{B}_3 \oplus \bar{A}_0 \cong \bar{B}_2 \oplus \bar{B}_1 \cong \bar{B}_2 \cong \bar{B}_1 \cong \bar{B}_3$. Somit ergibt sich: $\bar{B} \oplus \bar{A}_0 \cong \bar{B}_3 \oplus \bar{A}_0 \cong \bar{B}_1 \cong \bar{B}$, also $M \oplus \bar{A}_0 \cong M$. Weil $M \oplus \bar{A}_0$ χ_o -quasistetig, $A \subsetneq M$ ist, gilt $\bar{A}_0 \cong \bar{A}$ und damit $\bar{B} \oplus \bar{A} \cong \bar{B}$. Desweiteren ist $\bar{B} \oplus \bar{B} \cong (\bar{B}_3 \oplus \bar{B}_1) \oplus (\bar{B}_2 \oplus \bar{A}_0) \cong (\bar{B}_3 \oplus \bar{B}_1) \oplus (\bar{B}_2 \oplus \bar{A}_0) \cong \bar{B}$, also auch $M \oplus \bar{B} \cong M$. Der zweite Teil der Behauptung folgt mit 0.7, da $M \oplus \bar{A}$ bzw. $M \oplus \bar{B}$ χ_o -quasistetig sind.

#

Folgerung 2.2 wird in ([10], Prop.3) für M χ_o -quasistetig, nichtsingulär bewiesen.

2.2 Folgerung

Sei M χ_o -quasistetig. Dann sind äquivalent:

- M ist direkt finit.
- M enthält keine unendliche direkte Summe von paarweise isomorphen, von Null verschiedenen Untermoduln.
- Jeder Untermodul von M ist direkt finit.

Beweis

a $\Rightarrow$ b) folgt aus 2.1.

b $\Rightarrow$ c) Sei $A \subsetneq M$, $A = A_1 \oplus B_1$, $A \cong A_1$. Weil $A \cong A_1$ ist, existiert $A_1 = A_2 \oplus B_2$, $A_2 \cong A$, $B_2 \cong B_1$. Sukzessive erhält man für alle $n \in \mathbb{N}$ Zerlegungen $A = A_n \oplus \bigoplus_{i=1}^n B_i$, $A_n \cong A$, $B_i \cong B_1$. $\sum_{i \in \mathbb{N}} B_i = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} B_i$ ist nach Voraussetzung Null, d.h. A direkt finit.

$c \Rightarrow a)$ ist klar.

#

2.3 Folgerung

Sei M ein χ_o -quasistetiger, χ_o -wesentlich erzeugter Modul, so daß $M \overset{\oplus}{\subset} N$ und $N \overset{\oplus}{\subset} M$ für einen Modul N . Dann ist $M \cong N$.

Beweis

Sei $M \oplus A \oplus B \cong M$, $M \oplus B \cong N$. Offenbar gilt $\chi_o B \subset M$. Mit 2.1 folgt $M \oplus B \cong M$, also $M \cong N$.

#

2.4 Folgerung

Seien M und N Moduln, so daß M χ_o -stetig, χ_o -wesentlich erzeugt und N χ_o -quasistetig, χ_o -wesentlich erzeugt ist. Dann folgt aus $M \subset N \subset M$ $M \cong N$.

Beweis

Sei $N_2 \subset M_1 \subset N_1 \subset M$ mit $N \cong N_1 \cong N_2$, $M \cong M_1$. Offenbar ist wegen der χ_o -Stetigkeit von M M_1 direkter Summand in M und damit auch in N_1 .

Sei $M_1 \oplus H = N_1$ für ein $H \subset N_1$, $\bar{N}_2 \oplus K = M_1$ für ein $K \subset M_1$. Es folgt $\bar{N}_2 \oplus H \oplus K = N_1 \cong N$. Dies zeigt, daß $\chi_o(H \oplus K) \subset N$, mit Lemma 2.1 also $N \oplus H \oplus K \cong N$ gilt.

Wir zeigen, daß N_1 keinen großen, zu N_1 isomorphen Untermodul enthält. Hieraus ergibt sich wegen $N \cong N_2 \oplus H \oplus K \subset N_1$ die Gleichheit von N_2 und $\bar{N}_2$, d.h.

$M \overset{\oplus}{\subset} N \overset{\oplus}{\subset} M$, also $M \cong N$.

Sei $M' \oplus H' \subset N_1$, $M' \cong M$, $H' \cong H$. M' ist direkter Summand in N_1 . Mit 2.1 ist $\bar{H}' \cong H \cong H'$. Weil sich wegen Lemma 0.4 Homomorphismen von Untermoduln von $\bar{H}'$ nach $\bar{H}$ zu Endomorphismen von $\bar{H}'$ hochheben lassen, gilt $H' = \bar{H}'$, d.h. $M' \oplus H' = N$.

#

Daß für χ_o -quasistetige, χ_o -wesentlich erzeugte Moduln M und N $M \subset N \subset M$ für $N \cong M$ nicht hinreichend ist, zeigt z.B. $R = M = \mathbb{R}[x,y]$, $N = \langle x,y \rangle$.

Kapitel 3

χ_0 -quasistetige, χ_0 -wesentlich erzeugte Moduln mit der endlichen Austauschenschaft

3.1 Lemma

Sei M ein Modul mit der endlichen Austauschenschaft und sei $M \oplus A \cong M \oplus C$. Dann gibt es Zerlegungen $A = A_1 \oplus A_2$, $C = C_1 \oplus C_2$, $M = M_1 \oplus M_2$, so daß $M_2 \oplus A_2 \cong M_2 \oplus C_2 \cong M$, $A_1 \cong C_1$, $C_2 \cong M_1$.

Beweis

Sei $N = \hat{M} \oplus A = M \oplus C$, $M \cong \hat{M}$. Wegen der endlichen Austauschenschaft von M gibt es Zerlegungen $\hat{M} = \hat{M}_1 \oplus \hat{M}_2$, $A = A_1 \oplus A_2$, mit $N = M \oplus \hat{M}_1 \oplus A_1$. Es folgt mit dem Isomorphiesatz, daß $M \cong \hat{M}_1 \oplus \hat{M}_2 \cong \hat{M}_2 \oplus A_2$, $C \cong \hat{M}_1 \oplus A_1$ gilt. Sei $C = C_1 \oplus C_2$, $C_1 \cong A_1$, $C_2 \cong \hat{M}_1$ und $M = M_1 \oplus M_2$, $M_1 \cong \hat{M}_1$, $M_2 \cong \hat{M}_2$. Dann folgt $M_2 \oplus A_2 \cong M_2 \oplus C_2 \cong M$, $A_1 \cong C_1$, $C_2 \cong M_1$. #

3.2 Lemma

Sei M ein Modul mit der endlichen Austauschenschaft und sei $M \oplus A \cong M \oplus C$. Dann gibt es Zerlegungen $A = A' \oplus A''$, $C = C' \oplus C''$, $M = M' \oplus M''$, so daß $A' \cong C'$, $M'' \oplus A'' \cong M'' \oplus C'' \overset{\oplus}{\cong} M$, $A'' \oplus C'' \overset{\oplus}{\cong} M'$.

Beweis

Wegen 3.1 gibt es Zerlegungen $A = A_1 \oplus A_2$, $C = C_1 \oplus C_2$, $M = M_1 \oplus M_2$, so daß $A_1 \cong C_1$, $M_2 \oplus A_2 \cong M_2 \oplus C_2 \cong M$, $C_2 \cong M_1$. 3.1 angewandt auf $M_2 \oplus C_2 \cong M_2 \oplus A_2$ liefert Zerlegungen $C_2 = C_3 \oplus C''$, $A_2 = A_3 \oplus A''$, $M_2 = M_3 \oplus M''$ mit $C_3 \cong A_3$, $M'' \oplus C'' \cong M'' \oplus A'' \cong M_2 \overset{\oplus}{\cong} M$, $A'' \cong M_3$. Wir setzen $A' := A_1 \oplus A_3$, $C' := C_1 \oplus C_3$, $M' := M_1 \oplus M_3$. Dann gilt $A' \cong C'$, $A'' \oplus C'' \overset{\oplus}{\cong} A'' \oplus C_2 \cong M_3 \oplus M_1 = M'$. #

3.3 Satz

Sei M ein χ_0 -quasistetiger, χ_0 -wesentlich erzeugter Modul mit der endlichen Austauschenschaft. Dann gilt:

Zu $M \oplus A \cong (\overset{\oplus}{\bigoplus}) M \oplus C$, $A = \overset{n}{\bigoplus}_{i=1} A_i$, $C = \overset{m}{\bigoplus}_{i=1} C_i$, gibt es Zerlegungen $A_1 = A_{11} \oplus A_{12}$, $C_1 = C_{11} \oplus C_{12}$, so daß $\overset{n}{\bigoplus}_{i=1} A_{1i} \cong (\overset{\oplus}{\bigoplus}) \overset{m}{\bigoplus}_{i=1} C_{1i}$, $(\overset{n}{\bigoplus}_{i=1} A_{12} \oplus \overset{m}{\bigoplus}_{i=1} C_{12}) \overset{\oplus}{\cong} M$, $\chi_0(\overset{n}{\bigoplus}_{i=1} A_{12} \oplus \overset{m}{\bigoplus}_{i=1} C_{12}) \subsetneq M$. Insbesondere gilt mit 2.1:
 $M \cong M \oplus \overset{n}{\bigoplus}_{i=1} A_{12} \cong M \oplus \overset{m}{\bigoplus}_{i=1} C_{12} \cong M \oplus \overline{\chi_0 \overset{n}{\bigoplus}_{i=1} A_{12}} \cong M \oplus \overline{\chi_0 \overset{m}{\bigoplus}_{i=1} C_{12}}$.

Beweis

Sei zunächst $n = m = 1$ und $M \oplus A \cong M \oplus C$. Wir verwenden Lemma 3.2 und erhalten Zerlegungen $A = A' \oplus A''$, $C = C' \oplus C''$, $M = M' \oplus M''$, so daß $A' \cong C'$, $A'' \oplus C'' \overset{\oplus}{\cong} M'$, $M'' \oplus A'' \cong M'' \oplus C'' \overset{\oplus}{\cong} M$. Da es genügt, die Behauptung für $M'' \oplus A'' \cong M'' \oplus C''$ zu zeigen, und da $A'' \oplus C'' \overset{\oplus}{\cong} M$, kann o.E. die Existenz eines χ_o -quasistetigen, χ_o -wesentlich erzeugten Moduls N mit der endlichen Austauscheigenschaft angenommen werden, so daß

$$M \oplus A \cong M \oplus C, \quad M \oplus A \overset{\oplus}{\cong} N, \quad A \oplus C \overset{\oplus}{\cong} N.$$

Durch induktive Anwendung von 3.2 finden wir jetzt Moduln

$$A_1, A'_1, A_2, A'_2, \dots \overset{\oplus}{\subset} A, \quad C_1, C'_1, C_2, C'_2, \dots \overset{\oplus}{\subset} C, \quad M_1, M'_1, M_2, M'_2, \dots \overset{\oplus}{\subset} M,$$

so daß $A = A'_1 \oplus A''_1, \quad C = C'_1 \oplus C''_1, \quad M = M'_1 \oplus M''_1$

$$A''_n = A'_{n+1} \oplus A''_{n+1}, \quad C''_n = C'_{n+1} \oplus C''_{n+1}, \quad M''_n = M'_{n+1} \oplus M''_{n+1},$$

$$A''_n \cong C''_n, \quad M''_n \oplus A''_n \cong M''_n \oplus C''_n, \quad A''_n \oplus C''_n \overset{\oplus}{\cong} M'_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Nach Konstruktion ist offenbar $\sum_{n \in \mathbb{N}} A'_n = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A'_n \in \chi_o(A)$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} C'_n = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} C'_n \in \chi_o(C)$.

Sei $\overline{\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A'_n} \oplus A^2 := A$, $\overline{\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} C'_n} \oplus C^2 := C$. Wegen $A \oplus C \overset{\oplus}{\cong} N$ folgt mit 0.7, daß $A^1 := \overline{\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A'_n} \cong \overline{\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} C'_n} := C^1$.

Weil für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$A = A'_1 \oplus A'_2 \oplus \dots \oplus A'_n \oplus A''_n \quad \text{sowie} \quad A^2 \cap (A'_1 \oplus A'_2 \oplus \dots \oplus A'_n) = 0 \text{ gilt,}$$

haben wir $A^2 \overset{\oplus}{\subset} A''_n \overset{\oplus}{\cong} M'_n$. Weil $A \oplus M$ χ_o -quasistetig ist, folgt mit 0.4 sogar

$$A^2 \overset{\oplus}{\cong} M. \quad \text{Da } \sum_{n \in \mathbb{N}} M'_n \text{ direkt ist, folgt } \chi_o A^2 \overset{\oplus}{\subset} M. \quad \text{Analog ergibt sich } C^2 \overset{\oplus}{\cong} M,$$

$$\chi_o C^2 \overset{\oplus}{\subset} M. \quad \text{Mit 2.1 folgt sofort, daß } (A^2 \oplus C^2) \overset{\oplus}{\cong} M \text{ und } \chi_o (A^2 \oplus C^2) \overset{\oplus}{\subset} M.$$

Sei nun $A = \bigoplus_{i=1}^n A_i$, $C = \bigoplus_{i=1}^m C_i$. Wegen der obigen Überlegungen gibt es Zerlegungen

$$A = A^1 \oplus A^2, \quad C = C^1 \oplus C^2, \quad \text{so daß } A^1 \cong C^1, \quad A^2 \oplus C^2 \overset{\oplus}{\cong} M,$$

$$\chi_o (A^2 \oplus C^2) \overset{\oplus}{\subset} M. \quad \text{Da } A^2 \text{ als bis auf Isomorphie direkter Summand von } M \text{ die}$$

endliche Austauscheigenschaft besitzt, gibt es Zerlegungen $A_1 = A_{11} \oplus A_{12}$, so

$$\text{daß } \bigoplus_{i=1}^n A_i = A^2 \oplus \bigoplus_{i=1}^n A_{i1}. \quad \text{Es folgt } A^1 \cong \bigoplus_{i=1}^n A_{i1}, \quad A^2 \cong \bigoplus_{i=1}^n A_{i2}. \quad \text{Analog findet man}$$

$$C_1 = C_{11} \oplus C_{12} \quad \text{mit } C^1 \cong \bigoplus_{i=1}^m C_{i1}, \quad C^2 \cong \bigoplus_{i=1}^m C_{i2}.$$

Ist $M \oplus A \overset{\oplus}{\cong} M \oplus C$, also $M \oplus (A \oplus B) \cong M \oplus C$ für einen Modul B , so ergibt sich die Behauptung nun sofort. ■

Im Beweis von 3.3 wurde eine Idee von K.Goodearl in ([7], Th.1.4) aufgegriffen und mit Hilfe von 2.1 erweitert. Goodearl beweist in dem oben zitierten Theorem, daß reguläre, rechts χ_o -stetige, direkt finite Ringe die Kürzungseigenschaft besitzen.

3.4 Folgerung

Sei M ein χ_o -quasistetiger, χ_o -wesentlich erzeugter Modul mit der endlichen Austauscheneigenschaft und sei für $k \in \mathbb{N}$

$M \oplus \bigoplus_{i=1}^{n_1} A_i^1 \cong M \oplus \bigoplus_{i=1}^{n_2} A_i^2 \cong \dots \cong M \oplus \bigoplus_{i=1}^{n_k} A_i^k$. Dann gibt es für $j = 1, \dots, k$, Zerlegungen $A_i^j = A_{i1}^j \oplus A_{i2}^j$, so daß $\bigoplus_{i=1}^{n_1} A_{i1}^1 \cong \bigoplus_{i=1}^{n_2} A_{i1}^2 \cong \dots \cong \bigoplus_{i=1}^{n_k} A_{i1}^k$ und $\bigoplus_{j=1}^k \bigoplus_{i=1}^{n_j} A_{i2}^j \subseteq M$, $\chi_o(\bigoplus_{j=1}^k \bigoplus_{i=1}^{n_j} A_{i2}^j) \subseteq M$.

Der Beweis ergibt sich durch k -faches Anwenden von Satz 3.3 und der endlichen Austauscheneigenschaft von M . #

Die für spätere Sätze sehr wichtige Aussage von Lemma 3.5 ist für Moduln mit der Kürzungseigenschaft leicht zu beweisen. Daß für diese Aussage die Kürzungseigenschaft jedoch nicht notwendig ist, zeigt das kommende Lemma.

3.5 Lemma

Sei M ein χ_o -quasistetiger, χ_o -wesentlich erzeugter Modul mit der endlichen Austauscheneigenschaft. Seien Familien von Moduln $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(L_i)_{i \geq 2}$, gegeben mit $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots \subseteq M$, $A_i \oplus L_{i+1} \cong A_{i+1}$.

Dann gibt es einen Untermodul C_1 von M und eine Familie $(V_i)_{i \geq 2}$ von Untermoduln von M , so daß $C_1 \cong A_1$, $V_i \cong L_i$ für $i \in \mathbb{N}$, $A_n \cong C_1 + \sum_{i=2}^n V_i = C_1 \oplus \bigoplus_{i=2}^n V_i \subseteq M$ für $n \geq 2$.

Beweis

Wir zeigen zunächst, daß es Familien $\hat{C}_1$, $(\hat{L}_i)_{i \geq 2}$, $(\hat{L}_i'')_{i \geq 2}$ von Moduln gibt derart, daß $\hat{C}_1 \subseteq M$, $\hat{L}_i \subseteq M$, $\hat{C}_1 \cong A_1$ sowie für $n \geq 2$

$A_n \cong \hat{C}_1 + \sum_{i=2}^n \hat{L}_i = \hat{C}_1 \oplus \bigoplus_{i=2}^n \hat{L}_i \subseteq M$, $L_n \cong L_n' \oplus L_n''$, $L_n'' \subseteq A_{n-1}$, $\chi_o L_n'' \subseteq A_{n-1}$. Sei $A_1 \cong \hat{C}_1 \subseteq M$, $\hat{C}_1 \oplus T_1 = M$. Wegen $A_1 \oplus L_2 \subseteq M$ folgt mit 3.3 die Existenz von Zerlegungen $T_1 = L_2' \oplus T_1''$, $L_2 \cong L_2' \oplus L_2''$, so daß $L_2'' \subseteq A_1$, $\chi_o(L_2'') \subseteq A_1$. Dabei ist $\hat{C}_1 \oplus L_2' \cong A_2$. Sukzessive folgt die Behauptung.

Weil $M \oplus \overline{\chi_o L_i'} \cong M$ für alle $i \geq 2$ haben wir $\bigoplus_{i \geq 2} \chi_o L_i' \subseteq M$, also $\chi_o \bigoplus_{i \geq 2} L_i' \subseteq M$. Somit ist $M \oplus \bigoplus_{i \geq 2} L_i' \cong M$.

Sei jetzt $M = M_1 \oplus V''$, $M_1 \cong M$, $\bigoplus_{i \geq 2} V_i' \subseteq V'' \cong \bigoplus_{i \geq 2} \hat{L}_i'$, $V_i'' \cong L_i'$ und $C_1 \oplus \bigoplus_{i \geq 2} V_i' \subseteq M_1$ lokal-direkt mit $C_1 \cong A_1$, $V_i' \cong L_i'$. Wegen 0.4 ist $\bigoplus_{i \geq 2} V_i'$ lokal-direkt in V'' ; mit $V_i = V_i' \oplus V_i''$ gilt die Behauptung. #

Mit Hilfe von Lemma 3.6 steuern wir in Lemma 3.7 das Pendant zu Lemma 3.5 an.

Lemma 3.6

Sei D ein χ_o -quasistetiger, χ_o -wesentlich erzeugter Modul mit der endlichen Austausch eigenschaft und seien B, C, L Moduln, so daß $B \subseteq D$, $B \subseteq C \subseteq D$, $C \oplus L \cong D$ gilt. Dann existiert ein Modul $\hat{C}$, so daß $B \subseteq \hat{C} \subseteq D$, $\hat{C} \cong C$ und zu $\hat{C} \oplus L' = D$ gibt es eine Zerlegung $L \cong L' \oplus L''$ mit $L'' \subseteq C$, $\chi_o L' \subsetneq C$.

Beweis

Sei $B \oplus H = D$, $B \oplus G = C$. Wegen 3.3 existieren Zerlegungen $H = H_1 \oplus H_2$, $G = G_1 \oplus G_2$, so daß $H_1 \cong G_1$, $B \oplus G_2 \cong B$, also $B \oplus H_1 \cong C$. Wir haben $(B \oplus H_1) \oplus H_2 = D \cong C \oplus L$. Nochmaliges Anwenden von 3.3 liefert Zerlegungen $H_2 = L' \oplus H_2''$, $L \cong L' \oplus L''$, so daß $C \oplus H_2'' \cong C$, $L'' \subseteq C$, $\chi_o L' \subsetneq C$. Mit $\hat{C} = B \oplus H_1 \oplus H_2''$ folgt die Behauptung. #

3.7 Lemma

Sei ein Modul A und Familien $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(L_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Moduln gegeben derart, daß $A \subseteq \dots \subseteq Y_n \subseteq \dots \subseteq Y_1$, $Y_{i+1} \oplus L_i \cong Y_i$ für $i \in \mathbb{N}$. Zudem sei Y_1 ein χ_o -quasistetiger, χ_o -wesentlich erzeugter Modul mit der endlichen Austausch eigenschaft. Dann gibt es eine Familie von Moduln $(\hat{Y}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und Moduln L, H mit $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \hat{L}_i \subseteq L$, $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \hat{L}_i$ lokal-direkt, $\hat{L}_1 \cong L_1$, $A \oplus H \oplus L \cong Y_1$, $A \oplus H \oplus \overline{\bigoplus_{i \geq n} \hat{L}_i} \cong Y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis

Wir zeigen zunächst durch Induktion, daß eine Familie $(\hat{Y}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Moduln existiert, so daß $Y_i \cong \hat{Y}_i$, $A \subseteq \dots \subseteq \hat{Y}_n \subseteq \dots \subseteq \hat{Y}_1$, und zu $\hat{Y}_i = \hat{Y}_{i+1} \oplus L_i$ Zerlegungen $L_i \cong L'_i \oplus L''_i$ mit $L''_i \subseteq Y_i$, $\chi_o L'_i \subsetneq Y_i$ existieren.

Induktionsanfang: Sei $A \subseteq \hat{Y}_1$, $\hat{Y}_1 \cong Y_1$. Wegen 3.6 gibt es einen Modul $\hat{Y}_2 \cong Y_2$ mit $A \subseteq \hat{Y}_2 \subseteq \hat{Y}_1$ und zu $\hat{Y}_2 \oplus L'_1 = \hat{Y}_1$ eine Zerlegung $L_1 \cong L'_1 \oplus L''_1$ mit $L''_1 \subseteq \hat{Y}_2 \subseteq Y_1$, $\chi_o L'_1 \subsetneq \hat{Y}_2 \subseteq Y_1$.

Der Induktionsschritt folgt gleichfalls mit Lemma 3.6.

Sei jetzt $A \oplus H \oplus \overline{\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} L'_i} = \hat{Y}_1$ für einen Untermodul H von $\hat{Y}_1$. Offenbar gilt für $n \in \mathbb{N}$ $A \oplus H \oplus \overline{\bigoplus_{i \geq n} L'_i} \oplus \overline{\bigoplus_{i=1}^{n-1} L'_i} = \hat{Y}_n \oplus \overline{\bigoplus_{i=1}^{n-1} L'_i}$, also $A \oplus H \oplus \overline{\bigoplus_{i \geq n} L'_i} \cong \hat{Y}_n$.

Es gilt für $i \geq n$ $L'_i \subseteq \hat{Y}_n$, $\hat{Y}_n \oplus \overline{\chi_o L''_i} \cong \hat{Y}_n$, d.h. $\bigoplus_{i \geq n} \chi_o L'_i \cong \chi_o \bigoplus_{i \geq n} L'_i \subsetneq \hat{Y}_n$, $\chi_o \overline{\bigoplus_{i \geq n} L'_i} \subsetneq \hat{Y}_n$, $\hat{Y}_n \oplus \overline{\bigoplus_{i \geq n} L'_i} \cong \hat{Y}_n$.

Sei $L = \overline{\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} L'_i} \oplus \overline{\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} L''_i}$. Wegen 0.4 ist $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} L'_i$ lokal-direkt in $\overline{\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} L'_i}$.

Mit $\hat{L}_1 = L'_1 \oplus L''_1$ folgt $A \oplus H \oplus L \cong \hat{Y}_1 \oplus \overline{\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} L''_i} \cong \hat{Y}_1$, $\hat{L}_1 \cong L_1$,

$A \oplus H \oplus \overline{\bigoplus_{i \geq n} \hat{L}_i} \cong A \oplus H \oplus \overline{\bigoplus_{i \geq n} L'_i} \oplus \overline{\bigoplus_{i \geq n} L''_i} \cong \hat{Y}_n \oplus \overline{\bigoplus_{i \geq n} L''_i} \cong \hat{Y}_n$. #

3.8 Lemma

Sei M ein χ_o -quasistetiger, χ_o -wesentlich erzeugter Modul mit der endlichen Austausch-
eigenschaft und seien A_1, A_2, B_1, B_2 Moduln mit $A_1, A_2, B_1, B_2 \overset{\text{fin}}{\sim} M$,
 $A_1, A_2 \overset{\text{fin}}{\sim} B_1, B_2$. Dann existiert ein Modul C mit $A_1, A_2 \overset{\text{fin}}{\sim} C \overset{\text{fin}}{\sim} B_1, B_2$.

Beweis

Sei o.E. $A_1, A_2 \overset{\text{fin}}{\sim} B_1, A_1 \oplus D \cong B_1, A_2 \oplus E \cong B_1$. Wegen der endlichen Austausch-
eigenschaft von A_1 existieren Zerlegungen $A_2 = A_2' \oplus A_2'', E = E' \oplus E''$ mit
 $B_1 = A_1 \oplus A_2' \oplus E'$. Wir sehen hieraus, daß $D \overset{\text{fin}}{\sim} A_2, E \overset{\text{fin}}{\sim} A_1$ keine Einschränkung
bedeutet. Analog kann $B_2 \cong A_1 \oplus F, F \overset{\text{fin}}{\sim} A_2$ angenommen werden. Wir haben
 $A_1 \oplus D \cong A_2 \oplus E \overset{\text{fin}}{\sim} B_2 \oplus E \cong A_1 \oplus F \oplus E$. Wegen 3.3 existieren Zerlegungen
 $D = D_1 \oplus D_2, F = F_1 \oplus F_2, E = E_1 \oplus E_2$, so daß $D_1 \cong F_1 \oplus E_1, A_1 \oplus D_2 \cong A_1$.
Wir definieren $C := A_1 \oplus F_1$ und erhalten $A_1 \overset{\text{fin}}{\sim} C \overset{\text{fin}}{\sim} A_1 \oplus F \cong B_2$.

Weil $A_2 \oplus E \cong A_1 \oplus D \cong A_1 \oplus D_1 \cong A_1 \oplus F_1 \oplus E_1 \overset{\text{fin}}{\sim} C \oplus E$ gilt, gibt es eine Zer-
legung $A_2 = A_2' \oplus A_2''$, so daß $A_2' \overset{\text{fin}}{\sim} C, E \oplus A_2'' \cong E$, und da $E \overset{\text{fin}}{\sim} A_1$ auch
 $A_1 \oplus A_2'' \cong A_1$. Somit gilt $A_2 = A_2' \oplus A_2'' \overset{\text{fin}}{\sim} A_1 \oplus F_1 \oplus A_2'' \cong C$. $C \overset{\text{fin}}{\sim} B_1$ folgt aus
 $C \overset{\text{fin}}{\sim} A_1 \oplus F_1 \oplus E_1 \cong A_1 \oplus D_1 \cong A_1 \oplus D \cong B_1$.

Kapitel 4

Die Austauschseigenschaft von κ -stetigen Moduln über Rechts-ZP-Ringen und rechts kohärenten Ringen

§1 κ -stetige Moduln über Rechts-ZP-Ringen

Die folgenden Lemmata sind für viele spätere Sätze wichtig.

4.1 Lemma

M habe die 1-Erweiterungseigenschaft und es gebe für $i \in \mathbb{N}$ $x_i \in M$, für welche $\langle x_1, x_2, \dots \rangle \subseteq M$. Dann existiert ein großer, lokal-direkter Summand $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} D_i$ in M, so daß D_i zyklisch wesentlich erzeugt ist und $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \subseteq \bigoplus_{i=1}^n D_i$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis

Sei $\langle x_1, x_2, \dots \rangle \subseteq M$. Zu x_1 existiert ein $U_1 \subseteq M$ mit $x_1 R \subseteq U_1 \subseteq M$. Sei U_n bereits so bestimmt, daß $x_1, x_2, \dots, x_n \in U_n$, $U_n = \bigoplus_{i=1}^n D_i \subseteq M$, D_i zyklisch wesentlich erzeugt. Zu U_n gibt es ein $B_n \subseteq M$ mit $U_n \oplus B_n = M$. Ist $B_n \neq 0$, so gibt es ein kleinstes $m \in \mathbb{N}$ derart, daß $x_m \notin U_n$. Sei $x_m = u_n + b_n$ die Zerlegung von x_m in $U_n \oplus B_n$ und $b_n R \subseteq D_{n+1} \subseteq B_n$. Offenbar ist $U_{n+1} := U_n + D_{n+1} = U_n \oplus D_{n+1} \subseteq M$. Durch Induktion folgt die Behauptung. **

4.2 Folgerung

Für eine endliche Kardinalzahl κ sind κ -wesentlich erzeugte Moduln mit der 1-Erweiterungseigenschaft direkte Summe von κ 1-wesentlich erzeugten Untermoduln. Für eine beliebige Kardinalzahl κ sind κ -wesentlich erzeugte, projektive Moduln mit der 1-Erweiterungseigenschaft direkte Summe von κ 1-wesentlich erzeugten Untermoduln.

Der Beweis folgt aus dem vorigen Lemma und dem Zerlegungssatz von Kaplansky. **

An die folgende Definition schließen sich vier bekannte Ergebnisse an.

4.3 Definition und Lemma

Ein Ring R heißt Rechts-ZP-Ring, wenn alle zyklischen Rechtsideale projektiv sind.

Über einem Rechts-ZP-Ring R sind alle Untermoduln von freien R -Rechtsmoduln nichtsingulär. ([4], Prop. 1.22, 1.27)

Für Moduln A und B , B nichtsingulär, ist jeder Homomorphismus von A nach B mit großem Kern bereits der Nullhomomorphismus. ([4], Prop. 1.20, Lemma 2.1)

Für nichtsinguläre Moduln A und B sowie einen Epimorphismus $f: A \longrightarrow B$ ist für $A' \subseteq A$ auch $f(A') \subseteq f(A)$. ([4], Prop. 1.21, 1.22)

Für einen nichtsingulären Modul M sowie Untermoduln A, B, C, D von M mit $A \subseteq B$ und $C \subseteq D$ ist auch $(A + C) \subseteq (B + D)$. ([11], Lemma 3)

Analog zu rechts hereditären und rechts semi-hereditären Ringen gilt:

4.4 Lemma

Sei R ein Rechts-ZP-Ring, $xR \subseteq \bigoplus_{i=1}^k R_i$, $R_i \cong R_R$, und seien p_i die Projektionen auf R_i . Dann gibt es eine Zerlegung $xR = T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_k$, so daß $p_1|T_1$ ein Monomorphismus ist und $p_l(T_{l+1}) = 0$ für $l = 1, \dots, k-1$ gilt. Insbesondere ist xR projektiv.

Beweis

$p_1|xR$ zerfällt. Sei $xR = T_1 \oplus K_1$, $K_1 \equiv \text{Kern von } p_1|xR$.

$p_2|K_1$ zerfällt. Sei $K_1 = T_2 \oplus K_2$, $K_2 \equiv \text{Kern von } p_2|K_1$. Auf diese Weise fortfahrend erhält man nach k Schritten die Behauptung.

4.5 Lemma

Sei R ein Rechts-ZP-Ring, und sei eine Zerlegung $N = H \oplus F$, $\bigoplus_{i=1}^n A_i \subseteq N$ gegeben, H nichtsingulär, A_i zyklisch wesentlich erzeugt, $F = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} F_j$, und es existiere ein 1-stetiger Untermodul M eines freien R -Moduls, so daß für alle $i = 1, \dots, n$, $j \in \mathbb{N}$, $F_j \subseteq M$, $A_i \subseteq M$. Dann gibt es für $i = 1, \dots, n$ $A'_i \subseteq A_i$ und für $j \in \mathbb{N}$ $F'_j \subseteq F_j$, so daß $H + \bigoplus_{i=1}^n A_i = H \oplus \bigoplus_{i=1}^n A'_i$ und $H \oplus \bigoplus_{i=1}^n A'_i \oplus \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} F'_j = N$ gilt.

Beweis durch Induktion über n :

Der Induktionsanfang $n = 0$ ist klar.

Der Induktionsschritt wird von n auf $n+1$ geführt:

Sei bereits $H^n := H + \sum_{i=1}^n A_i = H \oplus \bigoplus_{i=1}^n A'_i$, $H^n \oplus F^n = N$ für $F^n := \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} F'_j$. Sei $xR \subseteq A_{n+1}$. Definiere π als Projektion von N auf F^n . Weil $\pi|xR$ zerfällt, ist $H^n + xR = H^n \oplus L_1$ für ein $L_1 \subseteq xR$. Da A_{n+1} 1-stetig ist, ist L_1 groß in einem direkten Summanden A'_{n+1} von A_{n+1} enthalten. Die Einschränkung von π auf L_1 ist ein Monomorphismus. Sei $\pi(L_1)$ in der endlichen Summe $\bigoplus_{j=1}^k F'_j$ enthalten. Wegen

Lemma 4.3 gilt dies gleichfalls für $\pi(A'_{n+1})$:

Sei für $j = 1, \dots, k$ p_j die Projektion von N auf F_j^n . Wie in Lemma 4.4 erhält man eine Zerlegung $L_1 = T_1 \oplus \dots \oplus T_k$ mit $p_j|_{T_j}$ ist Monomorphismus, $p_j(T_{j+l}) = 0, l \in \{1, \dots, k-1\}$. Wir haben für $T_j \subset \bar{T}_j \subset A'_{n+1}, A'_{n+1} = \bigoplus_{j=1}^k \bar{T}_j$. Wegen Lemma 4.3 ist auch $p_j(\bar{T}_{j+l}) = 0, l \in \{1, \dots, k-1\}$ und natürlich ist $p_j|_{\bar{T}_j}$ gleichfalls ein Monomorphismus. Weil $\bar{T}_j \subset A_{n+1} \subset M, \bar{T}_j \cong p_j(\bar{T}_j) \subset F_j^n \subset M$, sowie M 1-stetig ist, folgt mit 0.8, daß auch $p_j(\bar{T}_j)$ direkter Summand in F_j^n ist.

Sei $p_j(\bar{T}_j) \oplus F_j^{n+1} = F_j^n$. Wir behaupten, daß gilt:

$$\begin{aligned} H^n \oplus \bar{T}_1 \oplus F_1^{n+1} \oplus \bar{T}_2 \oplus F_2^{n+1} \oplus \dots \oplus \bar{T}_k \oplus F_k^{n+1} = \\ H^n \oplus p_1(\bar{T}_1) \oplus F_1^{n+1} \oplus p_2(\bar{T}_2) \oplus F_2^{n+1} \oplus \dots \oplus p_k(\bar{T}_k) \oplus F_k^{n+1}. \end{aligned}$$

Beweis:

' $\Rightarrow$ ': Sei $0 = h_n + t_1 + f_1 + t_2 + f_2 + \dots + t_k + f_k, h_n \in H^n, t_j \in \bar{T}_j, f_j \in F_j^{n+1}$.

Wir betrachten die Zerlegungen der t_j in $H^n \oplus \bigoplus_{j=1}^k F_j^n$:

$$t_1 = h_n^1 + f_1^1 + f_2^1 + \dots + f_k^1, h_n^1 \in H^n, f_1^1 = p_1(t_1) \in p_1(\bar{T}_1), f_1^1 \in F_1^n$$

$$t_2 = h_n^2 + 0 + f_2^2 + \dots + f_k^2, h_n^2 \in H^n, f_2^2 = p_2(t_2) \in p_2(\bar{T}_2), f_2^2 \in F_2^n$$

$\vdots$

$\vdots$

$$t_k = h_n^k + 0 + 0 + \dots + f_k^k, h_n^k \in H^n, f_k^k = p_k(t_k) \in p_k(\bar{T}_k).$$

Die Summe

$$(h_n + h_n^1 + \dots + h_n^k) + (f_1 + f_1^1) + (f_2 + f_2^1 + f_2^2) + \dots + (f_k + f_k^1 + \dots + f_k^k)$$

ist Null. Es folgt $f_1 + f_1^1 = 0$, und da $f_1 \in F_1^{n+1}, f_1^1 \in p_1(\bar{T}_1), f_1 = f_1^1 = 0$.

Weil $p_1|_{\bar{T}_1}$ ein Monomorphismus ist, ist somit $t_1 = 0$ ($p_1(t_1) = f_1^1$!), d.h.

$h_n^1 = f_1^1 = \dots = f_k^1 = 0$. Aus $f_2 + f_2^2 = 0$ ergibt sich durch analogen Schluss

$$f_2 = f_2^2 = 0, t_2 = 0, h_n^2 = f_2^2 = \dots = f_k^2 = 0. \text{ Nach } k \text{ Schritten folgt}$$

$$h_n = t_j = f_j = 0 \text{ für } 1 \leq j \leq k.$$

' $\Leftarrow$ ' ist klar

' $\supset$ ': Wir zeigen für $j = k, \dots, 1$ $p_j(\bar{T}_j) \subset H^n \oplus \bigoplus_{i=1}^k (F_i^{n+1} \oplus \bar{T}_i)$:

Zu $f_k \in p_k(\bar{T}_k)$ existieren $t_k \in \bar{T}_k, h_k \in H^n$ mit $t_k = h_k + f_k$, also

$$f_k = -h_k + t_k \in H^n \oplus \bigoplus_{i=1}^k (F_i^{n+1} \oplus \bar{T}_i).$$

Zu $f_{k-1} \in p_{k-1}(\bar{T}_{k-1})$ existieren $t_{k-1} \in \bar{T}_{k-1}, h_{k-1} \in H^n, f_k \in F_k^n$, so daß

$t_{k-1} = h_{k-1} + f_{k-1} + f_k$. Weil bereits $F_k^n \subset H^n \oplus \bigoplus_{i=1}^k (F_i^{n+1} \oplus \bar{T}_i)$ gilt, ist auch

$$f_{k-1} = -h_{k-1} + t_{k-1} - f_k \in H^n \oplus \bigoplus_{i=1}^k (F_i^{n+1} \oplus \bar{T}_i).$$

Sukzessive folgt die Behauptung.

Somit ist

$$H^n \oplus \bar{T}_1 \oplus F_1^{n+1} \oplus \bar{T}_2 \oplus F_2^{n+1} \oplus \dots \oplus \bar{T}_k \oplus F_k^{n+1} = H^n \oplus p_1(\bar{T}_1) \oplus F_1^{n+1} \oplus p_2(\bar{T}_2) \oplus F_2^{n+1} \oplus \dots \oplus p_k(\bar{T}_k) \oplus F_k^{n+1} \text{ gezeigt.}$$

Mit $F_j^{n+1} = F_j^n$ für $j > k$, $H^{n+1} = H^n \oplus A_{n+1}'$ folgt $N = H^{n+1} \oplus \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} F_j^{n+1}$.

H^{n+1} ist also direkter Summand in N . Da $(xR + A_{n+1}') \subseteq A_{n+1}$, also wegen Lemma 4.3 $H^n \oplus A_{n+1}' = H^n + (xR + A_{n+1}') \subseteq H^n + A_{n+1}$, haben wir $H^{n+1} = H^n + A_{n+1}$.

Der Induktionsbeweis ist beendet und die Behauptung 4.5 bewiesen. $\square$

4.6 Folgerung

Sei R ein Rechts-ZP-Ring, und sei eine Zerlegung $N = H \oplus F = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_i$ gegeben, A_i zyklisch wesentlich erzeugt, $F = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} F_i$, und es existiere ein 1-stetiger Untermodul M eines freien R -Moduls, so daß für alle $i, j \in \mathbb{N}$ $F_i \overset{\oplus}{\subseteq} M$, $A_i \overset{\oplus}{\subseteq} M$. Dann gibt es für $i \in \mathbb{N}$ $A_i' \subseteq A_i$, so daß $N = H \oplus F = H \oplus \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_i'$ gilt.

Der Beweis folgt sofort aus 4.5. $\square$

4.7 Satz

Ein 1-stetiger, projektiver Modul M über einem Rechts-ZP-Ring besitzt die Austauscheigenschaft.

Beweis

Wegen ([24], Prop. 3) reicht es, Zerlegungen $N = M \oplus B = \bigoplus_{i \in I} A_i$ mit zu M isomorphen A_i zu betrachten. Ein Satz von Kaplansky und ([18], Prop. 2.1) besagen, daß sogar M abzählbar erzeugt, $|I| = \aleph_0$ angenommen werden darf. Wegen 4.2 genügt es, Zerlegungen $N = M \oplus B = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_i$, A_i zyklisch wesentlich erzeugt, $A_i \overset{\oplus}{\subseteq} M$ zu betrachten. Folgerung 4.6 (ersetze F durch M , H durch B) beweist die Existenz von Untermoduln $A_i' \subseteq A_i$, so daß $N = B \oplus \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_i'$. Mit $A_i' \oplus A_i'' = A_i$ ergibt der Isomorphiesatz $B \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_i''$. Sei $B = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} B_i$, $B_i \cong A_i''$. Ein zweites Anwenden von Folgerung 4.6 (ersetze H durch M , F durch B) liefert die Behauptung. $\square$

4.8 Folgerung

Über einem regulären Ring haben alle projektiven Moduln die Austauscheigenschaft.

Beweis

Alle projektiven Moduln über einem regulären Ring sind regulär, also insbesondere 1-stetig. $\square$

Die Aussage von Folgerung 4.8 ist ein Ergebnis von J. Stock in [18].

Offenbar sind die 1-stetigen Rechts-ZP-Ringe genau die regulären Ringe. Beispiel 4.10 zeigt unter anderem, daß es über Rechts-ZP-Ringen projektive, 1-stetige Moduln gibt, die nicht regulär sind.

Vorerst noch ein sehr nützliches Lemma, welches insbesondere aussagt, daß Untermoduln von nichtsingulären Moduln groß in höchstens einem direkten Summanden sein können.

4.9 Lemma

Sei M ein nichtsingulärer Modul, $A \subset M$, $B \subset M$, $A \cap B \subseteq A$, $B \subseteq \bar{B} \subseteq M$. Dann gilt $A \subset \bar{B}$. Ist zusätzlich $A \cap B \subseteq B$, so gilt $A \subseteq \bar{B}$.

Beweis

Sei $\bar{B} \oplus C = M$. Die Projektion von A auf C hat den Kern $\bar{B} \cap A$, welcher groß in A ist. Mit 4.3 folgt, daß der Kern bereits A ist, also $A \subset \bar{B}$ gilt. Der zweite Teil der Behauptung ist klar. #

4.10 Beispiel

Es gibt einen Rechts-ZP-Ring R und einen zyklischen, projektiven R -Modul M , so daß M nicht regulär und nicht χ_0 -quasistetig, jedoch $M^{(I)}$ 1-stetig ist für eine beliebige Menge I .

Beweis

Sei T ein beliebiger regulärer Ring und $\hat{T}$ der Produktring über abzählbar unendlich viele Kopien von T . Sei S der Unterring von $\hat{T}$, bestehend aus allen Elementen von $\hat{T}$, welche in fast allen Komponenten konstant sind. Offenbar ist S ein regulärer Ring.

Wir zeigen, daß S_S nicht χ_0 -quasistetig ist:

Für $i \in \mathbb{N}$ bezeichne e_i das Element aus S , welches an der i -ten Stelle eine 1 und sonst Nullen stehen hat und für ein $s \in S$, s_i die i -te Komponente von s .

Sei $V := \langle e_2, e_4, e_6, \dots \rangle$. Angenommen, es gibt Rechtsideale $\bar{V}$ und $W = wS$, $w^2 = w$, in S mit $V \subseteq \bar{V} \subseteq S_S$, $\bar{V} \oplus W = S_S$. Es gilt für alle $v \in \bar{V}$ und alle $i \in \mathbb{N}$ $2_{i-1}v = 0$ und somit für alle $i \in \mathbb{N}$ $2_{i-1}w = 1$, $2_iw = 0$. Dies ist ein Widerspruch.

Wir definieren jetzt den Ring R als nicht vollen Unterring des 2×2 -Matrizenringes über S : $R := \begin{pmatrix} S & S \\ 0 & S \end{pmatrix}$.

Um R Rechts-ZP-Ring zu beweisen, betrachten wir zu $s_1, s_2, s_3 \in S$, $x := \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ 0 & s_3 \end{pmatrix}$,

das Ideal xR . Da S regulär ist, gibt es ein $s'_2 \in s_2 S$, so daß $s_1 S + s_2 S = s_1 S \oplus s'_2 S$ gilt. Man rechnet ohne Mühe nach, daß die Gleichheit

$$xR = \begin{pmatrix} s_1 & s_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R \oplus \begin{pmatrix} 0 & s'_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s_3 \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} s_1 S & s_1 S \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & s'_2 S \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s_3 S \end{pmatrix}$$

besteht.

$\begin{pmatrix} s_1 & s_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R$, sowie $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s_3 \end{pmatrix} R$ sind direkte Summanden in R_R . $\begin{pmatrix} 0 & s'_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R$ ist isomorph zu dem direkten Summanden $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s'_2 \end{pmatrix} R$ in R_R . xR ist also projektiv.

Sei nun $M := \begin{pmatrix} S & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Klar ist M zyklisch und projektiv.

Man beweist ohne Mühe, daß für $s_1, s_2 \in S$, $x := \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $L := s_1 S + s_2 S$, $xR = \begin{pmatrix} s_1 S & s_1 S + s_2 S \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ groß in dem direkten Summanden $\begin{pmatrix} L & L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ von M enthalten ist.

Hieraus ergibt sich sofort, daß M nicht regulär ist.

Wir zeigen, daß M M -1-injektiv ist, d.h. sich Homomorphismen von 1-wesentlich erzeugten Untermoduln von M nach M zu Endomorphismen von M hochheben lassen:

Wegen 4.3 reicht es, zyklische Untermoduln von M zu betrachten.

Sei für $s_1, s_2 \in S$, $xR = \begin{pmatrix} s_1 S & s_1 S \oplus s_2 S \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R \oplus \begin{pmatrix} 0 & s_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R \subset M$.

Sei $f: xR \longrightarrow M$, $f\left(\begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ein Homomorphismus.

Wir sehen, daß dann $f\left(\begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $f\left(\begin{pmatrix} 0 & s_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & v_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gilt.

$s_1 S \longrightarrow v_1 S$, $s_1 \longmapsto v_1$ definiert einen Homomorphismus, der sich zu einem Endomorphismus g von S_S mit $g(s_2) = 0$ hochheben läßt.

$s_2 S \longrightarrow v_2 S$, $s_2 \longmapsto v_2$, definiert einen Homomorphismus, der sich zu einem Endomorphismus h von S_S mit $h(s_1) = 0$ hochheben läßt.

Sei $p \in \text{End}(M)$ durch $p = g + h$ definiert. Dann ist

$\bar{f}: M \longrightarrow M$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} p(1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, eine Fortsetzung von f .

Somit ist gezeigt, daß M M -1-injektiv ist.

Wie oben gezeigt sind zyklische und wegen 4.9 auch 1-wesentlich erzeugte Untermoduln von M groß in einem direkten Summanden von M . Zusammen mit der 1-Injektivität folgt die 1-Stetigkeit von M . Vorgreifend benützen wir nun mehrere Ergebnisse von Kap. 5. Wegen 5.12 a) besitzt nM die 1-Erweiterungseigenschaft für alle $n \in \mathbb{N}$. Weil direkte Summanden von nM endlich erzeugt sind, folgt mit 4.2 und 5.12 b), daß nM 1-quasistetig ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit 0.4 ist dann nM nM -1-injektiv, d.h. nM 1-stetig für alle $n \in \mathbb{N}$. Da 1-wesentlich erzeugte Untermoduln

von $M^{(I)}$ aufgrund von 4.3 bereits in endlich vielen Summanden von $M^{(I)}$ enthalten sind, ist $M^{(I)}$ 1-stetig.

Um M nicht χ_0 -quasistetig zu zeigen, wird durch Widerspruch belegt, daß

$K := \begin{pmatrix} 0 & V \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nicht groß in einem direkten Summanden von M enthalten ist. Sei $K \subseteq \bar{K} \subseteq M$. Dann gibt es ein $s_1 \in S$ mit $\bar{K} = \begin{pmatrix} s_1 & s_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R$ und offenbar ist V groß in $s_1 S$ im Widerspruch zu oben. **

Für eine höchstens abzählbare Kardinalzahl steuern wir als nächstes ein Resultat über χ -wesentlich erzeugte, χ -stetige Untermoduln von freien Moduln über einem Rechts-ZP-Ring an. Es gelingt, für endliche Kardinalzahlen χ die Austauscheigenschaft und für $\chi = \chi_0$ zumindest noch die endliche Austauscheigenschaft für diese Moduln zu beweisen. Lemma 4.11 bis 4.13 bereiten diese Ergebnisse vor.

4.11 Lemma

Sei M ein Modul, $A, B \subseteq M$, $A + B = A \oplus B^1$ für ein $B^1 \subseteq B$, $B^1 \oplus B^2 = B$. Dann ist $A \cap B \cong B^2$.

Beweis

Sei $B^1 \oplus B^2 = B$, p die Projektion von $A \oplus B^1$ auf A . Man zeigt ohne Mühe, daß die Abbildung $f: B^2 \longrightarrow A \cap B$, $b^2 \longmapsto p(b^2)$ ein Isomorphismus ist. **

Sei im folgenden χ eine höchstens abzählbare Kardinalzahl.

4.12 Lemma

Sei R ein Rechts-ZP-Ring, M ein 1-stetiger Untermodul eines freien R -Moduls sowie $N = H \oplus F$ eine Zerlegung mit H nichtsingulär, $F \subseteq M$. Sei $A \subseteq N$, $A \subseteq M$, A χ -wesentlich erzeugt. Dann ist $H \cap A$ χ -wesentlich erzeugt.

Beweis

Wegen 4.1 existiert ein großer, lokal-direkter Summand $\bigoplus_{i \in I} A_i$ von A mit 1-wesentlich erzeugten A_i und $|I| = \chi$.

Für eine endliche Teilsumme $\bigoplus_{i \in J} A_i$, $|J| < \infty$, gibt es mit 4.5 direkte Summanden A_i' von A_i , so daß $H + \bigoplus_{i \in J} A_i = H \oplus \bigoplus_{i \in J} A_i'$ gilt. Ist χ endlich, so folgt mit Lemma 4.11 sofort, daß $H \cap A$ χ -wesentlich erzeugt ist. Ist $\chi = \chi_0$, so gibt es eine aufsteigende Folge $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von endlichen Teilmengen J_n von I mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n = I$. Wegen 4.5 und 4.11 ist $H \cap \bigoplus_{i \in J_n} A_i$ $|J_n|$ -wesentlich erzeugt, d.h.

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (H \cap \bigoplus_{i \in J_n} A_i) = H \cap \bigoplus_{i \in I} A_i \subseteq H \cap A \quad \chi_0\text{-wesentlich erzeugt.} \quad \#$$

4.13 Lemma

Sei M ein χ -stetiger Modul, $N = H \oplus F$ eine Zerlegung mit $F \subseteq^{\oplus} M$. Sei $A \subseteq N$, $A \subseteq^{\oplus} M$, $H \cap A$ χ -wesentlich erzeugt. Dann gibt es Untermoduln $F_1 \subseteq F$, $A_1, A_2 \subseteq A$, so daß $H \cap A \subseteq A_2$, $A_1 \oplus A_2 = A$, $N = H \oplus A_1 \oplus F_1$ gilt.

Beweis

A ist χ -stetig. Somit existiert $A = A_1 \oplus A_2$, $H \cap A \subseteq A_2$. Sei π die Projektion von N auf F . $\pi|_{A_1}$ ist ein Monomorphismus, d.h. $\pi(A_1) \cong A_1$, und da $A_1 \subseteq^{\oplus} M$, $F \subseteq^{\oplus} M$, auch $\pi(A_1) \subseteq F$. Sei $\pi(A_1) \oplus F_1 := F$. Dann ist offenbar $N = H \oplus \pi(A_1) \oplus F_1 = H \oplus A_1 \oplus F_1$. #

4.14 Satz

Sei R ein Rechts-ZP-Ring und M ein χ -stetiger, χ -wesentlich erzeugter Untermodul eines freien R -Moduls. Dann hat M die endliche Austauschenschaft.

Beweis

Mit ([24], Prop. 3) reicht es, Zerlegungen $N = M \oplus B = C \oplus D$, $M \cong C \cong D$, zu betrachten. Wegen 4.12 (ersetze: $H \rightarrow B$, $F \rightarrow M$, $A \rightarrow C$) ist $B \cap C$ χ -wesentlich erzeugt, und wegen 4.13 gibt es $M_1 \subseteq M$, $C_1, C_2 \subseteq C$, so daß $C = C_1 \oplus C_2$, $B \cap C \subseteq C_2$, $N = B \oplus C_1 \oplus M_1$. Für $N = M_1 \oplus (B \oplus C_1) = C \oplus D$ gilt mit 4.12 (ersetze: $H \rightarrow (B \oplus C_1)$, $F \rightarrow M_1$, $A \rightarrow D$), daß $(B \oplus C_1) \cap D$ χ -wesentlich erzeugt ist, und durch nochmaliges Anwenden von 4.13 finden wir $D_1, D_2 \subseteq D$, $M_{1,1} \subseteq M_1$, so daß $D_1 \oplus D_2 = D$, $(B \oplus C_1) \cap D \subseteq D_2$ und $N = (B \oplus C_1) \oplus D_1 \oplus M_{1,1}$.

Nach Konstruktion ist $B \oplus C_1 \oplus D_1$ auch groß in N , also $B \oplus C_1 \oplus D_1 = N$. Hieraus folgt insbesondere $B \cong C_2 \oplus D_2$. Sei $B = B_C \oplus B_D$, $B_C \cong C_2$, $B_D \cong D_2$. Zu $N = B_C \oplus (M \oplus B_D) = C \oplus D$ gibt es analog wie oben $C_3 \subseteq C$, $D_3 \subseteq D$, so daß $N = (M \oplus B_D) \oplus C_3 \oplus D_3$ gilt.

Schließlich finden wir zu $N = B_D \oplus (M \oplus C_3 \oplus D_3) = C \oplus D$ $C_4 \subseteq C$, $D_4 \subseteq D$, so daß $N = M \oplus C_3 \oplus D_3 \oplus C_4 \oplus D_4$ und der Beweis ist beendet. #

4.15 Folgerung

Sei χ eine natürliche Zahl. Ein χ -stetiger, χ -wesentlich erzeugter Untermodul M

eines freien Moduls über einem Rechts-ZP-Ring hat die Austauscheigenschaft.

Beweis

Sei $N = M \oplus B = \bigoplus_{i \in I} A_i$, $M \cong A_1$. Es existiert ein endlich erzeugter, großer Untermodul F von M . F ist für eine endliche Teilmenge J von I in $\bigoplus_{i \in J} A_i$ enthalten, und mit Satz 4.14 gibt es ein $A' \subset \bigoplus_{i \in J} A_i$ und für $i \in J$ $A'_i \subset A_i$, so daß $N = M \oplus \bigoplus_{i \in J} A'_i \oplus A'$ gilt. Da offenbar $\bigoplus_{i \notin J} A_i \cap (M \oplus \bigoplus_{i \in J} A'_i) = 0$ ist, folgt $A' = \bigoplus_{i \notin J} A_i$, d.h. $N = M \oplus \bigoplus_{i \in J} A'_i \oplus \bigoplus_{i \notin J} A_i$.

■

§ 2 α -stetige Moduln über rechts kohärenten Ringen

Für den verbleibenden Teil dieses Kapitels betrachten wir α -stetige Moduln, wobei $\alpha = e$ oder $\alpha = X_0$ sein soll. Dabei sind unter e -stetigen Moduln endlich-stetige Moduln zu verstehen.

Für α -stetige Untermoduln von freien Moduln über einem rechts kohärenten Ring kann gleichfalls die endliche Austauschenschaft bewiesen werden. Dabei ist bekannterweise ein rechts kohärenter Ring ein Ring, für welchen alle endlich erzeugten Rechtsideale endlich präsentiert sind.

4.16 Lemma

Sei R ein rechts kohärenter Ring.

Dann ist der Schnitt zweier α -wesentlich erzeugter Untermoduln eines freien R -Moduls gleichfalls α -wesentlich erzeugt.

Beweis

Es reicht zu zeigen, daß der Schnitt zweier endlich erzeugter Untermoduln A und B eines freien R -Moduls ebenfalls endlich erzeugt ist.

Wegen ([3], Prop. 11.34) sind endlich erzeugte Untermoduln eines freien Moduls über einem rechts kohärenten Ring endlich präsentiert. Der Schnitt von A und B ist endlich erzeugt: Der Beweis hierfür kann analog zu jenem in ([23], Satz 4.2) für rechts fast kohärente Ringe geführt werden. #

4.17 Satz

Sei R ein rechts kohärenter Ring, M ein α -stetiger, α -wesentlich erzeugter Untermodul eines freien R -Moduls. Dann hat M die endliche Austauschenschaft.

Beweis

Wegen 4.16 kann der Beweis völlig analog zu jenem in 4.14 geführt werden. #

4.18 Folgerung

Ein endlich wesentlich erzeugter, endlich-stetiger Untermodul M eines freien Moduls über einem rechts kohärenten Ring hat die Austauschenschaft.

Der Beweis geht analog zu 4.15. #

§3 Die innere Austausch eigenschaft

4.19 Definition und Lemma

Ein Modul M hat die innere Austausch eigenschaft, wenn es zu zwei Zerlegungen $M = A \oplus B = C \oplus D$ Untermoduln $C_1 \subset C$, $D_1 \subset D$ gibt mit $M = A \oplus C_1 \oplus D_1$.

Die innere Austausch eigenschaft bleibt bei direkten Summanden und Isomorphie erhalten.

4.20 Lemma

Sei R ein Rechts-ZP-Ring, M ein Modul mit der 1-Erweiterungseigenschaft, so daß endliche direkte Summen von 1-wesentlich erzeugten, direkten Summanden in M wieder direkte Summanden in M sind. M sei in einem freien R -Modul enthalten. Dann ist der Schnitt von zwei χ -wesentlich erzeugten, direkten Summanden von M χ -wesentlich erzeugt.

Beweis

Sei zunächst $\chi = e$, A und B e -wesentlich erzeugte, direkte Summanden von M . Mit 4.2 existieren Zerlegungen $A = \bigoplus_{j=1}^n A_j$, $B = \bigoplus_{j=1}^n B_j$, A_j , B_j 1-wesentlich erzeugt, $B_j = \overline{b_j}R$. Sei $A \oplus C = M$. Weil die Projektion von b_jR auf C zerfällt, gibt es eine Zerlegung $b_jR = L_j \oplus (A \cap b_jR)$ mit $A + b_jR = A \oplus L_j$. Für $L_j \subset \bar{L}_j \subset B_j$ gilt: $A \oplus \bar{L}_j \subset M$. Wegen 4.3 ist $A \oplus \bar{L}_j = A + ((A \cap b_jR) \oplus \bar{L}_j) \subset A + B_j$, was nur für $A \oplus \bar{L}_j = A + B_j$ möglich ist. Sukzessive finden wir direkte Summanden $\bar{L}_2 \subset B_2$, ..., $\bar{L}_n \subset B_n$, so daß $A + \bigoplus_{j=1}^n B_j = A \oplus \bigoplus_{j=1}^n \bar{L}_j$. 4.11 besagt, daß dann $A \cap B$ endlich wesentlich erzeugt ist.

Seien A, B jetzt χ_0 -wesentlich erzeugt. Aufgrund von 4.1 gibt es $A' = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_i \subset A$, $B' = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} B_i \subset B$, A_i, B_i 1-wesentlich erzeugt, A', B' lokal-direkt. Mit Hilfe obiger Überlegung folgt nun die Behauptung. #

4.21 Lemma

Sei M ein χ -quasistetiger, χ -wesentlich erzeugter Modul, so daß der Schnitt zweier direkter Summanden von M χ -wesentlich erzeugt ist. Dann hat M die innere Austausch eigenschaft.

Beweis

Sei $M = A \oplus B = C \oplus D$. Es existiert $A \cap C \subset C_2 \subset C$, $C = C_1 \oplus C_2$. Weil M χ -quasistetig ist, ist $A \oplus C_1$ direkter Summand in M . $(A \oplus C_1) \cap D$ ist χ -wesent-

lich erzeugt, d.h. es gibt $(A \oplus C_1) \cap D \subseteq D_2 \subseteq D$, $D = D_1 \oplus D_2$. Dann ist $A \oplus C_1 \oplus D_1$ direkter Summand in M . Da $A \oplus C_1 \oplus D_1$ groß in M ist, folgt $A \oplus C_1 \oplus D_1 = M$. #

4.22 Folgerung

Sei R ein Rechts-ZP-Ring oder rechts kohärent, M ein κ -quasistetiger, κ -wesentlich erzeugter Untermodul eines freien R -Moduls. Dann hat M die innere Austauscheigenschaft.

Der Beweis folgt mit Hilfe von 4.20, 4.16 und 4.21. #

Kapitel 5

Kürzungs- und Struktureigenschaften χ_o -(quasi)stetiger Moduln über Rechts-ZP-Ringen und rechts kohärenten Ringen

§1 Kürzungs- und Substitutionseigenschaft

Satz 5.1 ergibt sich mit Hilfe der Ergebnisse in Kapitel 2,3 und 4. Er verbessert Theorem 7 in [10], wo die Kürzungseigenschaft für χ_o -wesentlich erzeugte, χ_o -quasistetige, direkt finite, projektive Moduln über einem regulären Ring gezeigt wird. In 5.1 wird zwar χ_o -stetig vorausgesetzt, jedoch ist, wie wir später sehen werden, ein χ_o -quasistetiger, projektiver Modul über einem regulären Ring bereits χ_o -stetig.

5.1 Satz

Sei R ein Rechts-ZP-Ring oder ein rechts kohärenter Ring, und sei $M \in \chi_o(M)$ ein χ_o -stetiger, direkt finiter Untermodul eines freien R -Moduls.

Dann hat M die Substitutionseigenschaft.

Beweis

M hat mit 4.14 bzw. 4.17 die endliche Austauschseigenschaft. Mit ([13], Satz 4.5)⁽¹⁾ reicht es, die Kürzungseigenschaft für M zu beweisen. Diese folgt aus 3.3. #

Wird in 5.1 sogar M projektiv gefordert, kann auf ' χ_o -wesentlich erzeugt' verzichtet werden. Somit stellt auch 5.2 eine Verbesserung von ([10], Th.7) dar. Theorem 8 in [10], welches besagt, daß die direkte Summe zweier χ_o -quasistetiger, χ_o -wesentlich erzeugter, projektiver, direkt finiter Moduln über einem regulären Ring wieder direkt finit ist, ergibt sich als leichte Folgerung aus 5.2.

5.2 Satz

Sei R ein Rechts-ZP-Ring oder ein rechts kohärenter Ring, und sei M ein projektiver, χ_o -stetiger, direkt finiter R -Modul. Dann hat M die Substitutionseigenschaft.

Beweis

Mit Hilfe von Kaplansky haben wir eine Zerlegung $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, M_i abzählbar erzeugt. Wegen Satz 5.1 haben die M_i die Substitutionseigenschaft, und wegen

(1) Zur Erleichterung für den Leser wird der Beweis im Anhang ausgeführt.

Lemma 1.4 ist $(M_i)_{i \in I}$ stark lokal semi-t-nilpotent. Die Substitutionseigenschaft von M ergibt sich mit ([13], Satz 7.3) (vergleiche Beweis zu 1.5).

■

In [19] wird ein Bassring als Ring definiert, der 1 im stabilen Rang hat. Warfield zeigt in ([22], Th.2.1), daß dies äquivalent zur Substitutionseigenschaft auf einer Seite des Ringes ist. Es folgt also:

5.3 Folgerung

Sei R ein Rechts-ZP-Ring oder rechts kohärent, und sei R rechts χ_0 -stetig und direkt finit. Dann ist R ein Bassring.

K. Goodearl hat in ([7], Th.1.4) bewiesen, daß ein direkt finiter, rechts χ_0 -stetiger, regulärer Ring R bereits unit-regulär ist. Weil reguläre Ringe genau dann Bassringe sind, wenn sie unit-regulär sind ([22], Th.2.4), folgt dieses Resultat aus 5.3.

Das nächste Ziel ist, Kürzungseigenschaften endlicher direkter Summen χ_0 -stetiger, χ_0 -wesentlich erzeugter Moduln zu untersuchen. Diese müssen, wie in Kapitel 0 erwähnt, im allgemeinen nicht mehr χ_0 -stetig sein.

Ein sehr wichtiges Hilfsmittel ist das folgende Lemma.

5.4 Lemma

Sei N ein Modul und seien für $i = 1, \dots, n$ A_i Moduln mit der endlichen Austausch-eigenschaft und $A_i \oplus N$. Dann gibt es für $i = 1, \dots, n$ Moduln B_i mit

$$B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_n \oplus N, \bigoplus_{i=1}^n A_i \cong \bigoplus_{i=1}^n B_i, B_n \cong \bigoplus_{i=1}^n A_i, A_i \oplus A_i, A_i \oplus B_n.$$

Beweis

Sei für $i = 1, \dots, n$ $C_i \oplus N$ mit $C_i \cong A_i$.

Wir zeigen im ersten Schritt, daß es direkte Summanden C_i' von C_i gibt, so daß $\sum_{i=1}^n C_i' = \bigoplus_{i=1}^n C_i' \oplus N$, $C_i' = C_i$ und $C_j \cong \bigoplus_{i=1}^j C_i'$ für $j \in \{1, \dots, n\}$:

Sei $C_1 \oplus H_1 = N$ für ein $H_1 \oplus N$. Weil C_1 die endliche Austauscheigenschaft hat, ist $N = C_1 \oplus C_2' \oplus H_2'$ für $C_2' \oplus C_2$, $H_2' \oplus H_2$. Klar ist $C_2 \cong C_1 \oplus C_2'$. Da $C_1 \oplus C_2'$ die endliche Austauscheigenschaft besitzt, gibt es $C_3' \oplus C_3$, $H_3' \oplus H_3$, so daß $N = C_1 \oplus C_2' \oplus C_3' \oplus H_3'$ gilt. Offenbar ist $C_3 \cong C_1 \oplus C_2' \oplus C_3'$. Induktiv folgt die Behauptung des ersten Schrittes.

Wir zeigen im zweiten Schritt durch Induktion über n die Behauptung des Lemmas.
 $n = 1$ ist klar.

Sei die Beh. richtig für $n-1$:

Mit $B_n := \bigoplus_{i=1}^n C_i'$, $C_i := C_i' \oplus C_i''$ haben wir $C_2'', C_3'', \dots, C_n'' \leq B_n$ und die C_i'' haben die endliche Austauscheigenschaft. Aufgrund der Induktionsvoraussetzung gibt es $B_1 \leq B_2 \leq \dots \leq B_{n-1} \leq B_n$, so daß $\bigoplus_{i=2}^n C_i'' \cong \bigoplus_{i=1}^{n-1} B_i$. Insgesamt ergibt sich:
 $\bigoplus_{i=1}^n A_i \cong \bigoplus_{i=1}^n C_i \cong \bigoplus_{i=1}^n C_i' \oplus \bigoplus_{i=1}^n C_i'' \cong \bigoplus_{i=1}^n B_i$ mit $B_1 \leq B_2 \leq \dots \leq B_n \leq N$.
 Mit $A_i := A_i' \oplus A_i''$, $A_i' \cong C_i'$, $A_i'' \cong C_i''$ ergibt sich die Behauptung. **

Lemma 5.5 findet in vielen Beweisen Verwendung.

5.5 Lemma

Sei R ein Rechts-ZP-Ring oder rechts kohärent. Seien $M_1 \leq M_2 \leq \dots \leq M_n$, $n \in \mathbb{N}$, χ_o -quasistetige, χ_o -wesentlich erzeugte Moduln mit der endlichen Austauscheigenschaft, M_n sei in einem freien R -Modul enthalten.

Ist für $M := \bigoplus_{i=1}^n M_i$ $M \oplus C \cong (\bigoplus_{i=1}^n M_i) \oplus D$, so gibt es Zerlegungen $C = C' \oplus C''$, $D = D' \oplus D''$, so daß $C' \cong (\bigoplus_{i=1}^n M_i) D'$, $(C'' \oplus D'') \leq M_n$, $\chi_o(C'' \oplus D'') \leq M_n$.

Beweis durch Induktion über n :

$n = 1$ ist die Aussage von Lemma 3.3.

$n-1 \rightarrow n$:

Sei $(M_1 \oplus \dots \oplus M_{n-1}) \oplus (M_n \oplus C) \cong (\bigoplus_{i=1}^n M_i) \oplus (M_n \oplus D)$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es Zerlegungen $(M_n \oplus C) = (M_n \oplus C)' \oplus (M_n \oplus C)''$, $(M_n \oplus D) = (M_n \oplus D)' \oplus (M_n \oplus D)''$, so daß $(M_n \oplus C)' \cong (\bigoplus_{i=1}^n M_i) (M_n \oplus D)'$, $((M_n \oplus C)'' \oplus (M_n \oplus D)'') \leq M_{n-1}$, $\chi_o((M_n \oplus C)'' \oplus (M_n \oplus D)'') \leq M_{n-1}$.

Insbesondere ist $M_{n-1} \cong M_{n-1} \oplus (M_n \oplus C)'' \cong M_{n-1} \oplus (M_n \oplus D)''$.

Die bis auf Isomorphie direkten Summanden $(M_n \oplus C)''$ und $(M_n \oplus D)''$ von M_{n-1} haben die endliche Austauscheigenschaft. Es gibt dann Zerlegungen

$M_n = M_{n1} \oplus M_{n2}$, $C = C_1 \oplus C_2$, $M_n = \tilde{M}_{n1} \oplus \tilde{M}_{n2}$, $D = D_1 \oplus D_2$ mit
 $(M_n \oplus C)' \cong M_{n1} \oplus C_1$, $(M_n \oplus C)'' \cong M_{n2} \oplus C_2$, $(M_n \oplus D)' \cong \tilde{M}_{n1} \oplus D_1$,
 $(M_n \oplus D)'' \cong \tilde{M}_{n2} \oplus D_2$. Wegen 4.16 bzw. 4.20 ist $(M_{n1} \cap \tilde{M}_{n1}) \in \chi_o(M_n)$. Sei $(M_{n1} \cap \tilde{M}_{n1}) \leq S \leq M_{n1}$, $S \oplus V := M_{n1}$, $(M_{n1} \cap \tilde{M}_{n1}) \leq \tilde{S} \leq \tilde{M}_{n1}$, $\tilde{S} \oplus \tilde{V} := \tilde{M}_{n1}$.
 Wir haben also $M_n = S \oplus V \oplus M_{n2} = \tilde{S} \oplus \tilde{V} \oplus \tilde{M}_{n2}$. Wegen 0.6 gilt $S \cong \tilde{S}$.
 Da $V \cap \tilde{M}_{n1} = 0$ bzw. $\tilde{V} \cap M_{n1} = 0$ ist, läßt sich V bzw. $\tilde{V}$ nach $\tilde{M}_{n2}$ bzw. M_{n2} einbetten. Offenbar gilt dann $\chi_o(V \oplus \tilde{V}) \leq M_{n-1} \leq M_n$, $V \leq M_n$, $\tilde{V} \leq M_n$,

also mit 2.1 $\overline{\chi_o V} \cong \overline{\chi_o V} \oplus \overline{\chi_o \tilde{V}} \cong \overline{\chi_o V} \oplus V$, $\overline{\chi_o \tilde{V}} \cong \overline{\chi_o \tilde{V}} \oplus \overline{\chi_o \tilde{V}} \cong \overline{\chi_o \tilde{V}} \oplus \tilde{V}$,
 $\overline{\chi_o V} \oplus \overline{\chi_o \tilde{V}} \cong \overline{\chi_o (V \oplus \tilde{V})} \cong \overline{\chi_o (V \oplus \tilde{V})} \oplus \overline{\chi_o (V \oplus \tilde{V})} \cong \overline{\chi_o (V \oplus \tilde{V})} \oplus V \cong$
 $\cong \overline{\chi_o (V \oplus \tilde{V})} \oplus \tilde{V}$. Klar ist nun

$(\overline{\chi_o (V \oplus \tilde{V})} \oplus S) \oplus C_1 \cong \overline{\chi_o (V \oplus \tilde{V})} \oplus V \oplus S \oplus C_1 \cong \overline{\chi_o (V \oplus \tilde{V})} \oplus (M_n \oplus C)' \cong$
 $(\bigoplus \overline{\chi_o (V \oplus \tilde{V})} \oplus (M_n \oplus D))' \cong \overline{\chi_o (V \oplus \tilde{V})} \oplus \tilde{V} \oplus \tilde{S} \oplus D_1 \cong (\overline{\chi_o (V \oplus \tilde{V})} \oplus S) \oplus D_1$.
 Weil $(\overline{\chi_o (V \oplus \tilde{V})} \oplus S) \cong \overline{\chi_o (V \oplus \tilde{V})} \oplus M_n \cong M_n$ ist, finden wir mit 3.3
 Zerlegungen $C_1 = C' \oplus C_1''$, $D_1 = D' \oplus D_1''$, so daß $C' \cong (\bigoplus D')$, $(C_1'' \oplus D_1'') \cong M_n$,
 $\chi_o(C_1'' \oplus D_1'') \subsetneq M_n$.

Wir definieren $C'' := C_1' \oplus C_2$, $D'' := D_1'' \oplus D_2$. Es ist $(C_2 \oplus D_2) \cong M_{n-1} \oplus M_n$,
 $\chi_o(C_2 \oplus D_2) \subsetneq M_{n-1} \oplus M_n$, $(C_1' \oplus D_1'') \cong M_n$, $\chi_o(C_1' \oplus D_1'') \subsetneq M_n$. Aus 2.1 ergibt
 sich, daß $(C'' \oplus D'') \cong M_n$, $\chi_o(C'' \oplus D'') \subsetneq M_n$. **

5.6 Satz

Für einen endlich erzeugten, projektiven Modul M über einem rechts kohärenten,
 rechts χ_o -stetigen Ring gilt:

- Ist $M \oplus B \cong (\bigoplus) M \oplus C$, so gibt es Zerlegungen $B = B_1 \oplus B_2$, $C = C_1 \oplus C_2$
 sowie $M' \subseteq M$ χ_o -stetig mit $B_1 \cong (\bigoplus) C_1$, $(B_2 \oplus C_2) \cong M'$, $\chi_o(B_2 \oplus C_2) \subsetneq M'$.
- Ist N endlich erzeugt projektiv, $M \cong N \oplus M$, so ist $M \cong N$.
- Ist M direkt finit, so hat M die Substitutionseigenschaft.

Beweis

Weil R_R und damit M wegen 4.17 die endliche Austauscheigenschaft besitzen, ist
 M bis auf Isomorphie endliche direkte Summe von durch Idempotente erzeugten
 Rechtsidealen von R .

- a) gilt dann wegen 5.4 und 5.5. Für b) und c) können aufgrund von a) die Be-
 weise von 2.3 und 5.1 übernommen werden. **

§2 χ_o -Quasistetigkeit von endlichen direkten Summen

Im folgenden soll die Frage untersucht werden, wann für χ_o -quasistetige, χ_o -wesentlich erzeugte Untermoduln A_i , $i = 1, \dots, n$, eines freien Moduls über einem Rechts-ZP-Ring oder einem rechts kohärenten Ring ihre direkte Summe wieder χ_o -quasistetig ist. Für Rechts-ZP-Ringe müssen hierfür etliche Vorbereitungen getroffen werden.

5.7 Definition

Für Moduln B und C und eine Kardinalzahl χ heißt C B - χ -(g-)injektiv, wenn sich jeder Homomorphismus eines χ -wesentlich erzeugten (großen) Untermoduls von B nach C zu einem Homomorphismus von B nach C hochheben läßt.

5.8 Lemma

Für Moduln $B, B_1, B_2, \dots, B_k, C, C_1, C_2, \dots, C_n$, $k, n \in \mathbb{N}$, gilt:

- Ist C_j B - χ -(g-)injektiv für $j = 1, \dots, n$, so ist auch $\bigoplus_{j=1}^n C_j$ B - χ -(g-)injektiv.
- Ist $C_1 \oplus C_2$ und C_2 B - χ -(g-)injektiv, so ist auch C_1 B - χ -(g-)injektiv.
- Ist $B_1 \oplus B_2$ und C B_2 - χ -injektiv, so ist auch C B_1 - χ -injektiv.
- Ist C B - χ -g-injektiv, so gilt für jeden Homomorphismus f von $E(B)$ nach $E(C)$ mit $(f^{-1}(C) \cap B)$ χ -wesentlich erzeugt, daß $f(B) \subset C$ ist.
- Sei C B_i - χ -g-injektiv für $i = 1, \dots, k$, $U \subset \bigoplus_{i=1}^k B_i$, $U \cap B_i$ χ -wesentlich erzeugter Untermodul von B_i . Dann läßt sich jeder Homomorphismus von U nach C zu einem Homomorphismus von $\bigoplus_{i=1}^k B_i$ nach C hochheben.

Beweis

- a), b), c) ist klar.
- d) Weil $C \subset E(C)$ ist, gilt $f^{-1}(C) \subset E(B)$, also $f^{-1}(C) \cap B \subset B$. $f|_{(f^{-1}(C) \cap B)}$ läßt sich zu einem Homomorphismus $g: B \longrightarrow C$ hochheben. Angenommen, es gibt ein $b \in B$, so daß $0 \neq f(b) \notin C$, also $0 \neq (f(b) - g(b)) \notin C$. Es gibt dann ein Element $r \in R$ mit $0 \neq (f(br) - g(br)) \in C$, d.h. $f(br) \in C$. Es folgt $br \in f^{-1}(C) \cap B$, also $f(br) = g(br)$ im Widerspruch zu oben.
- e) $f: U \longrightarrow C$ läßt sich zu einem Homomorphismus $\bar{f}: \bigoplus_{i=1}^k E(B_i) \longrightarrow E(C)$ hochheben. Sei $f_i = \bar{f}|_{E(B_i)}$. Es gilt $U \cap B_i \subset f_i^{-1}(C) \cap B_i \subset B_i$, also wegen d) $f_i(B_i) \subset C$, d.h. $\bar{f}(\bigoplus_{i=1}^k B_i) \subset C$. Somit ist $\bar{f}|_{\bigoplus_{i=1}^k B_i}$ eine Fortsetzung von f . $\#$

5.9 Lemma

Sei R ein Rechts-ZP-Ring, C ein R -Modul und $B_1, \dots, B_k$ Untermoduln eines freien R -Moduls. Ist C B_i -1-g-injektiv für $i = 1, \dots, k$, so ist $C \bigoplus_{i=1}^k B_i$ -1-g-injektiv.

Beweis

Sei $U \subseteq B := \bigoplus_{i=1}^k B_i$, U 1-wesentlich erzeugt, $f: U \longrightarrow C$ ein Homomorphismus. Mittels der Projektionen von B auf $\bigoplus_{j \neq i} B_j$ ($j \in \{1, \dots, k\}$) folgt mit 4.4, daß $xR \cap B_j$ zyklisch, also $U \cap B_j$ 1-wesentlich erzeugt ist. Aus Lemma 5.8 e) ergibt sich die Behauptung. #

5.10 Lemma

Sei R ein Rechts-ZP-Ring, für $i = 1, \dots, n$ B_i 1-quasistetige Untermoduln eines freien R -Moduls und B_i B_j -1-injektiv für $i \neq j$. Dann gilt für $B'_i \oplus B''_i \subseteq B_i$, daß $\bigoplus_{i=1}^n B'_i \oplus \bigoplus_{i=1}^n B''_i$ -1-g-injektiv ist.

Beweis

Wegen Lemma 5.8 b), c) ist für $i \neq j$ $B'_i B''_j$ -1-injektiv, also insbesondere 1-g-injektiv. Aus der 1-Quasistetigkeit von B_i folgt mit 0.4, daß $B'_i B''_i$ -1-g-injektiv ist. Lemma 5.9 besagt, daß $B'_i \bigoplus_{i=1}^n B''_i$ -1-g-injektiv ist, und mit 5.8 a) folgt die Behauptung. #

5.11 Lemma

Sei R ein Rechts-ZP-Ring, H ein R -Modul, $F_1, \dots, F_k$ 1-quasistetige Untermoduln eines freien R -Moduls, sowie $x \in F := H \oplus \bigoplus_{j=1}^k F_j$, $xR \subseteq U \subseteq F$, $U \cap H = 0$. Dann gibt es Zerlegungen $F_j = F'_j \oplus F''_j$ mit $U \oplus H \oplus \bigoplus_{j=1}^k F'_j \subseteq F$.

Beweis

Seien für $j = 1, \dots, k$ p_j die Projektionen von F auf F_j . Es gibt wie im Beweis zu 4.4 eine Zerlegung $xR = T_1 \oplus \dots \oplus T_k$ mit $p_j|_{T_j}$ ist ein Monomorphismus und $p_i(T_{j+1}) = 0, i \in \{1, \dots, k-1\}$.

Sei $p_j(T_j) \subseteq \overline{p_j(T_j)} \subseteq \bigoplus F_j, \overline{p_j(T_j)} \oplus F'_j := F_j$.

Beh.: $L := xR + H + \sum_{j=1}^k F'_j = \bigoplus_{j=1}^k T_j \oplus H \oplus \bigoplus_{j=1}^k F'_j \subseteq H \oplus \bigoplus_{j=1}^k \overline{p_j(T_j)} \oplus \bigoplus_{j=1}^k F'_j = F$.

' $\oplus$ ' geht analog wie im Beweis zu 4.5.

' $\subseteq$ ': Wir zeigen durch Induktion über $j = k, \dots, 1$, daß für $0 \neq f_j \in \overline{p_j(T_j)}$ ein $\beta_j \in R$ existiert, so daß $0 \neq f_j \beta_j \in L$:

$j = k$: Sei $0 \neq f_k \in \overline{p_k(T_k)}$. Es gibt ein $\beta_k \in R$ mit $0 \neq f_k \beta_k \in p_k(T_k)$. Dazu existieren $h_k \in H, t_k \in T_k$, so daß $t_k = h_k + f_k \beta_k$, also $0 \neq f_k \beta_k = -h_k + t_k \in L$.

Induktionsschritt von $j+1$ nach j :

Sei $0 \neq f_j \in \overline{p_j(T_j)}$. Es gibt ein $\alpha_j \in R$ mit $0 \neq f_j \alpha_j \in p_j(T_j)$. Dazu existieren Elemente $h_j \in H$, $t_j \in T_j$, $f_{j,l+1} \in F_{j+1}$ für $l = 1, \dots, k-j$, so daß

$t_j = h_j + f_j \alpha_j + f_{j,j+1} + \dots + f_{j,k}$, also $0 \neq f_j \alpha_j = -h_j + t_j - f_{j,j+1} - \dots - f_{j,k}$.

Sei $f_{j,l+1} = f'_{j,l+1} + f''_{j,l+1}$, $f'_{j,l+1} \in F_{j+1}$, $f''_{j,l+1} \in \overline{p_{j+1}(T_{j+1})}$, d.h.

$0 \neq t_j = h_j + f_j \alpha_j + \sum_{l=1}^{k-j} f'_{j,l+1} + f''_{j,l+1} + \dots + f''_{j,k}$. Mit Hilfe der Induktionsannahme finden wir nach höchstens $k-j$ Schritten ein $\alpha'_j \in R$, so daß $0 \neq t_j \alpha'_j$, sowie $f''_{j,l+1} \alpha'_j \in L$ für $l = 1, \dots, k-j$. Weil $p_j|T_j$ ein Monomorphismus ist, gilt $0 \neq f_j \alpha_j \alpha'_j \in L$.

Mit $\beta_j = \alpha_j \alpha'_j$ ist der Induktionsschritt gezeigt.

Sei nun $0 \neq y = h + a_1 + \dots + a_k + f_1 + \dots + f_k$, $h \in H$, $a_j \in \overline{p_j(T_j)}$, $f_j \in F_j$.

Wir finden aufgrund obiger Überlegung nach höchstens k Schritten ein $\alpha \in R$, so daß $0 \neq y\alpha \in L$ gilt.

Somit ist $L \subseteq F$, also auch $U \oplus H \oplus \bigoplus_{j=1}^k F_j \subseteq F$, und mit $F'_j := \overline{p_j(T_j)}$ ist Lemma 5.11 bewiesen. **

5.12 Lemma

Sei R ein Rechts-ZP-Ring, für $i = 1, \dots, n$ B_i 1-quasistetige Untermoduln eines freien R -Moduls, so daß $B_i B_j$ -1-injektiv für $i \neq j$ ist. Dann gilt:

- Zu $U \subseteq B = \bigoplus_{i=1}^n B_i$, U 1-wesentlich erzeugt, gibt es $U \subseteq \bar{U} \subseteq B$ und Zerlegungen $B_i = B'_i \oplus B''_i$, so daß $\bar{U} \oplus \bigoplus_{i=1}^n B'_i = B$ gilt. Insbesondere ist $\bar{U} \cong \bigoplus_{i=1}^n B''_i$.
- Eine endliche direkte Summe von 1-wesentlich erzeugten, direkten Summanden in B ist gleichfalls direkter Summand in B .

Beweis

- Mit Lemma 5.11 gibt es Zerlegungen $B_i = B'_i \oplus B''_i$, so daß $U \oplus \bigoplus_{i=1}^n B'_i \subseteq B$ gilt. Die Projektionen π_1 von B auf $\bigoplus_{i=1}^n B'_i$, π_2 von B auf $\bigoplus_{i=1}^n B''_i$ definieren einen Homomorphismus $f: \pi_2(U) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n B'_i$, $\pi_2(u) \longmapsto \pi_1(u)$, $u \in U$, wobei $U \cong \pi_2(U) \subseteq \bigoplus_{i=1}^n B''_i$. f läßt sich wegen Lemma 5.10 zu einem Homomorphismus $\bar{f}$ von $\bigoplus_{i=1}^n B''_i$ nach $\bigoplus_{i=1}^n B'_i$ hochheben. Für $\bar{U} := \{x + \bar{f}(x) \mid x \in \bigoplus_{i=1}^n B''_i\}$ gilt $U \subseteq \bar{U} \subseteq B$ sowie $\bar{U} \oplus \bigoplus_{i=1}^n B'_i = B$. Klar ist $\bar{U} \cong \bigoplus_{i=1}^n B''_i$.
- Seien U und V 1-wesentlich erzeugte, direkte Summanden in B mit Durchschnitt Null. Aus a) folgt, daß es Zerlegungen $B_i = B_{i1} \oplus B_{i2}$ gibt, so daß $\bar{U} \oplus \bigoplus_{i=1}^n B_{i1} = B$, $\bar{U} \cong \bigoplus_{i=1}^n B_{i2}$. Sicherlich ist $\bar{U} = U$. Sei $\bar{U} = \bigoplus_{i=1}^n U_i$, $U_i \cong B_{i2}$.

Wegen 5.11 gibt es Zerlegungen $B_{i1}' = B_{i2}' \oplus B_{i2}''$, so daß $V \oplus U \oplus \bigoplus_{i=1}^n B_{i2}' \subseteq B$. Lemma 5.10 beweist, daß $(\bigoplus_{i=1}^n U_i \oplus \bigoplus_{i=1}^n B_{i2}') \bigoplus_{i=1}^n B_{i2}''$ 1-g-injektiv ist. Wie in a) folgt jetzt $V \oplus U \oplus \bigoplus_{i=1}^n B_{i2}' = B$. Für endlich viele direkte Summanden mit paarweisem Schnitt Null ergibt sich die Behauptung sukzessive. **

5.13 Lemma

Sei R ein Rechts-ZP-Ring, für $i = 1, \dots, n$ B_i χ_o -quasistetige, χ_o -wesentlich erzeugte Untermoduln eines freien R -Moduls und B_i B_j -1-injektiv für $i \neq j$. Dann gibt es zu $U \subseteq B := \bigoplus_{i=1}^n B_i$, U χ_o -wesentlich erzeugt, Zerlegungen $B_i = B_i' \oplus B_i''$, so daß für $j \in \{1, \dots, n\}$ $U + \bigoplus_{i=1}^j B_i' = U \oplus \bigoplus_{i=1}^j B_i'$, $(U \oplus \bigoplus_{i=1}^{j-1} B_i') \cap B_j \subseteq B_j''$. Insbesondere ist $U \oplus \bigoplus_{i=1}^n B_i' \subseteq B$.

Beweis durch Induktion über j :

$j = 1$:

Sei $\hat{U}$ eine maximal wesentliche Erweiterung von U in B . Wegen 5.12 und 4.3 besitzt $\hat{U}$ die 1-Erweiterungseigenschaft und aufgrund von 4.1 einen großen, lokal-direkten Summanden $U' = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} U_k$, U_k 1-wesentlich erzeugt. 4.3 besagt, daß die U_k auch direkte Summanden in B sind. Mit 5.12 b) ist U' lokal-direkter Summand in B . Mit Hilfe von 4.20 ergibt sich, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ $B_1 \cap \bigoplus_{k=1}^n U_k$ χ_o -wesentlich erzeugt, also $B_1 \cap \hat{U}$ χ_o -wesentlich erzeugt ist.

Sei $\hat{U} \cap B_1 \subseteq B_1' \subseteq B_1$, $B_1'' \oplus B_1' := B_1$. Dann ist $\hat{U} + B_1' = \hat{U} \oplus B_1'$, $\hat{U} \cap B_1 \subseteq B_1'$ und somit $U + B_1' = U \oplus B_1'$, $U \cap B_1 \subseteq B_1''$.

$j \rightarrow j+1$:

Seien bereits die Zerlegungen $B_i = B_i' \oplus B_i''$, $1 \leq i \leq j$, $U + \bigoplus_{i=1}^j B_i' = U \oplus \bigoplus_{i=1}^j B_i'$, $(U \oplus \bigoplus_{i=1}^{j-1} B_i') \cap B_j \subseteq B_j''$, gegeben, und sei wie im Induktionsanfang $\hat{W}$ eine maximal wesentliche Erweiterung von $(U \oplus \bigoplus_{i=1}^j B_i')$ in B , sowie $W' = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} W_k$, W_k 1-wesentlich erzeugt, ein großer, lokal-direkter Summand in $\hat{W}$, welcher ebenfalls lokal-direkt in B ist. $\hat{W} \cap B_{j+1}$ ist wieder χ_o -wesentlich erzeugt.

Sei $\hat{W} \cap B_{j+1} \subseteq B_{j+1}'$, $B_{j+1}'' \oplus B_{j+1}' := B_{j+1}$. Dann gilt

$\hat{W} + B_{j+1}' = \hat{W} \oplus B_{j+1}'$, $\hat{W} \cap B_{j+1} \subseteq B_{j+1}'$, also auch

$(U \oplus \bigoplus_{i=1}^j B_i') + B_{j+1}' = (U \oplus \bigoplus_{i=1}^j B_i') \oplus B_{j+1}'$, $(U \oplus \bigoplus_{i=1}^j B_i') \cap B_{j+1} \subseteq B_{j+1}''$.

Der Induktionsbeweis ist damit beendet.

Ohne Mühe zeigt man, daß $U \oplus \bigoplus_{i=1}^n B_i' \subseteq B$ ist. **

5.14 Satz

Sei R ein Rechts-ZP-Ring, für $i = 1, \dots, n$ B_i χ_o -quasistetige, χ_o -wesentlich erzeugte Untermoduln eines freien R -Moduls und $B_i B_j$ - χ_o -injektiv für $i \neq j$.

Dann ist auch $B = \bigoplus_{i=1}^n B_i$ χ_o -quasistetig.

Beweis

Im ersten Schritt zeigen wir, daß es zu einem χ_o -wesentlich erzeugten Untermodul U von B $U \subsetneq \bar{U} \subsetneq B$ und Zerlegungen $B_i = B_i' \oplus B_i''$ gibt, so daß

$$\bar{U} \oplus \bigoplus_{i=1}^n B_i' = B \text{ ist:}$$

Sei $\hat{U}$ eine maximal wesentliche Erweiterung von U in B und $U' = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} U_k$, U_k 1-wesentlich erzeugt, wie in Lemma 5.13 ein großer, lokal-direkter Summand in $\hat{U}$, der auch lokal-direkter Summand in B ist. Es existieren wegen 5.13 Zerlegungen $B_i = B_i' \oplus B_i''$, sodaß $\hat{U} \oplus \bigoplus_{i=1}^n B_i' \subsetneq B$ gilt. Zu den Projektionen π_1 von B auf $\bigoplus_{i=1}^n B_i'$, π_2 von B auf $\bigoplus_{i=1}^n B_i''$ betrachten wir den wohldefinierten Homomorphismus

$$f: \pi_2(\hat{U}) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n B_i', \quad \pi_2(u) \longmapsto \pi_1(u), \quad u \in \hat{U}.$$

Offenbar ist

$$\pi_2\left(\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} U_k\right) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \pi_2(U_k) \subsetneq \pi_2(\hat{U}) \subsetneq \bigoplus_{i=1}^n B_i''.$$

Wir zeigen durch Widerspruch, daß $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \pi_2(U_k)$ gleichfalls lokal-direkter Summand in B ist:

$\bigoplus_{i=1}^n B_i''$ erfüllt die Voraussetzungen von 5.12. Sei $\pi_2(U_k) \subsetneq \overline{\pi_2(U_k)} \subsetneq \bigoplus_{i=1}^n B_i''$, $\overline{\pi_2(U_k)} \cong \bigoplus_{i=1}^n B_i'''$, $B_i''' \subsetneq B_i''$. Wegen 5.10 läßt sich $f|_{\pi_2(U_k)}$ zu f' von $\overline{\pi_2(U_k)}$ nach $\bigoplus_{i=1}^n B_i'$ hochheben und klar ist dann $U_k \subsetneq \{x + f'(x) \mid x \in \overline{\pi_2(U_k)}\}$, was ein Widerspruch ist.

4.20 ergibt, daß $\pi_2(\hat{U})$ n B_i'' χ_o -wesentlich erzeugt ist. Mit 5.8 a) und 0.4 folgt, daß $\bigoplus_{i=1}^n B_i' B_j''$ - χ_o -injektiv ist für $j = 1, \dots, n$. f läßt sich aufgrund von 5.8 e) nach $\bigoplus_{i=1}^n B_i'$ hochheben. Es existiert also $\hat{U} \subsetneq \bar{U} \subsetneq B$, so daß $\bar{U} \oplus \bigoplus_{i=1}^n B_i' = B$. Wegen der Maximalität von $\hat{U}$ ist $\hat{U} = \bar{U}$.

Im zweiten Schritt zeigen wir, daß die Summe von zwei direkten Summanden U und V von B mit Schnitt Null ebenfalls direkter Summand ist:

Wegen des ersten Schrittes gibt es Zerlegungen $B_i = B_{i1} \oplus B_{i2}$, so daß

$$U \oplus \bigoplus_{i=1}^n B_{i1} = B \text{ gilt. Es folgt } U \cong \bigoplus_{i=1}^n B_{i1}'. \text{ Sei } U = \bigoplus_{i=1}^n U_{i1}, \quad U_{i1} \cong B_{i1}'. \text{ Die Zerlegung } B = \bigoplus_{i=1}^n U_{i1} \oplus \bigoplus_{i=1}^n B_{i2} \text{ erfüllt die Voraussetzungen von 5.13. Es gibt also Zerlegungen } B_{i2} = B_{i2}' \oplus B_{i2}'', \text{ so daß } V \oplus \bigoplus_{i=1}^n U_{i1} \oplus \bigoplus_{i=1}^n B_{i2}' \subsetneq B. \text{ Analog zum ersten Schritt folgt } V \oplus \bigoplus_{i=1}^n U_{i1} \oplus \bigoplus_{i=1}^n B_{i2}' = V \oplus U \oplus \bigoplus_{i=1}^n B_{i2}' = B.$$

##

Es sei bemerkt, daß wegen Lemma 0.4 auch die Umkehrung von Satz 5.14 gilt, d.h. aus B χ_o -quasistetig $B_i B_j$ - χ_o -injektiv für $i \neq j$ folgt.

Mit Hilfe von 5.15 sind wir in der Lage Satz 5.14 auch für die entsprechenden Moduln über einem rechts kohärenten Ring zu beweisen.

5.15 Lemma

Sei R ein rechts kohärenter Ring, für $i = 1, \dots, n$ B_i χ_0 -quasistetige, χ_0 -wesentlich erzeugte Untermoduln eines freien R -Moduls. Dann gilt für $B := \bigoplus_{i=1}^n B_i$:

- Zu $U \in \chi_0(B)$ gibt es Zerlegungen $B_i = B_i' \oplus B_i''$, so daß für $j \in \{1, \dots, n\}$
 $U + \bigoplus_{i=1}^j B_i' = U \oplus \bigoplus_{i=1}^j B_i'$, $(U \oplus \bigoplus_{i=1}^{j-1} B_i') \cap B_j \subseteq B_j''$. Insbesondere ist
 $U \oplus \bigoplus_{i=1}^n B_i' \subseteq B$.
- Ist $B_i B_j - \chi_0$ -injektiv für $i \neq j$, so ist für Zerlegungen $B_i = B_i' \oplus B_i''$ $\bigoplus_{i=1}^n B_i'' - \chi_0$ -injektiv.

Beweis

- Wegen 4.16 kann der Beweis ähnlich wie in 5.13 durchgeführt werden.
- Wegen a) reicht es, Homomorphismen von großen, χ_0 -wesentlich erzeugten Untermoduln von $\bigoplus_{i=1}^n B_i''$ nach $\bigoplus_{i=1}^n B_i'$ zu Homomorphismen von $\bigoplus_{i=1}^n B_i''$ nach $\bigoplus_{i=1}^n B_i'$ hochzuheben. Die Behauptung folgt nun aus 0.4, 4.16 sowie 5.8 a), e). #

5.16 Satz

Sei R ein rechts kohärenter Ring, für $i = 1, \dots, n$ B_i χ_0 -quasistetige, χ_0 -wesentlich erzeugte Untermoduln eines freien R -Moduls, sowie $B_i B_j - \chi_0$ -injektiv für $i \neq j$. Dann ist $B := \bigoplus_{i=1}^n B_i$ χ_0 -quasistetig.

Beweis

Sei $U \subseteq B$, U χ_0 -wesentlich erzeugt. Es existiert $B_i = B_i' \oplus B_i''$, so daß $U \oplus \bigoplus_{i=1}^n B_i' \subseteq B$. Der zu den Projektionen π_1 von B auf $\bigoplus_{i=1}^n B_i'$, π_2 von B auf $\bigoplus_{i=1}^n B_i''$ existierende Homomorphismus $f: \pi_2(U) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n B_i'$, $\pi_2(u) \longmapsto \pi_1(u)$, $u \in U$, läßt sich wegen 5.15 nach $\bigoplus_{i=1}^n B_i''$ hochheben und es gibt es ein $U \subseteq \bar{U} \subseteq B$, so daß $\bar{U} \oplus \bigoplus_{i=1}^n B_i' = B$ gilt. Wie im zweiten Schritt von 5.14 fortfahrend erhält man die Behauptung.

#

§ 3 Wurzelziehen

5.17 Lemma

Sei $B = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} D_i$ ein Modul mit der endlichen Austausch­eigenschaft und $B' = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} B_i$ ein lokal-direkter Summand in B . Dann existieren lokal-direkte Summanden $D'_j = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} D_{ij}$ in D_j , so daß $B' \cong \bigoplus_{j=1}^n D'_j$ gilt.

Beweis

Weil B_1 die endliche Austausch­eigenschaft hat, gibt es Zerlegungen $D_1 = D_{11} \oplus D'_{11}$, so daß $B = B_1 \oplus \bigoplus_{j=2}^n D_j$ gilt. Somit ist $B_1 \cong \bigoplus_{j=1}^n D_{1j}$. Da $B_1 \oplus B_2$ die endliche Austausch­eigenschaft besitzt, gibt es Zerlegungen $D_{21} = D_{211} \oplus D'_{211}$ mit $B = B_1 \oplus B_2 \oplus \bigoplus_{j=3}^n D_j$. Es gilt $B_2 \cong \bigoplus_{j=1}^n D_{2j}$. Sukzessive erhalten wir für $i \in \mathbb{N}$ Zerlegungen $D_{ij} = D_{i+1,j} \oplus D'_{i+1,j}$ mit $B_{i+1} \cong \bigoplus_{j=1}^n D_{i+1,j}$. Es folgt $B \cong \bigoplus_{j=1}^n \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} D_{ij}$ und mit $D'_j = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} D_{ij}$ ist die Behauptung bewiesen. #

5.18 Lemma

Sei R ein Rechts-ZP-Ring oder rechts kohärent, N ein χ_o -quasistetiger, χ_o -wesentlich erzeugter Untermodul eines freien R -Moduls, für $j = 1, \dots, n$ $D_j \overset{\text{e}}{\cong} N$. Sei A ein χ_o -wesentlich erzeugter Untermodul eines freien R -Moduls mit mA χ_o -quasistetig für ein $m \in \mathbb{N}$. Es gelte zusätzlich, daß die Moduln A und D_j die endliche Austausch­eigenschaft besitzen und mit $B := \bigoplus_{j=1}^n D_j$ A χ_o -injektiv sowie A D_j - χ_o -injektiv für $j = 1, \dots, n$ ist.

Ist dann $mA \cong (\overset{\text{e}}{\cong}) mB$, so ist $A \cong (\overset{\text{e}}{\cong}) B$.

Beweis

Sei o.E. $m \geq 2$ und zunächst $mA \overset{\text{e}}{\cong} mB$.

Wir zeigen im ersten Schritt, daß es Zerlegungen $A = A_1 \oplus A'_1$, $B = B_1 \oplus B'_1$ gibt, so daß $A_1 \cong B_1$, $mA'_1 \overset{\text{e}}{\cong} mB'_1$, $mA'_1 \overset{\text{e}}{\cong} (m-1)A$:

Weil $A \overset{\text{e}}{\cong} mB$ ist und A die endliche Austausch­eigenschaft besitzt, gibt es eine Zerlegung $A = D_1 \oplus \dots \oplus D_m$, $D_i \overset{\text{e}}{\cong} B$. Sei $D_i \cong C_1 \overset{\text{e}}{\cong} B$. Wegen 5.4 existieren $\tilde{B}_1 \overset{\text{e}}{\cong} B$, für $i = 1, \dots, m$ $C'_1 \overset{\text{e}}{\cong} C_1$ mit $\tilde{B}_1 \cong \bigoplus_{i=1}^m C'_1$, $C_1 \overset{\text{e}}{\cong} \tilde{B}_1$, und aufgrund von Satz 3.3 gibt es für $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq j$, $C_{ij} \overset{\text{e}}{\cong} C'_1$ mit $\tilde{B}_1 \cong C_j \oplus \bigoplus_{i \neq j} C_{ij}$. Sei für $i \neq j$ $D_{ij} \oplus L_{ij} = D_i$, $D_{ij} \cong C_{ij}$. Es ist

$$A \cong (C_1 \oplus C_{21} \oplus \dots \oplus C_{m1}) \oplus (0 \oplus L_{21} \oplus \dots \oplus L_{m1}) \cong (C_{12} \oplus C_2 \oplus \dots \oplus C_{m2}) \oplus (L_{12} \oplus 0 \oplus \dots \oplus L_{m2}) \cong \dots \cong (C_{1m} \oplus C_{2m} \oplus \dots \oplus C_m) \oplus (L_{1m} \oplus L_{2m} \oplus \dots \oplus 0).$$

Wegen 3.4 kann o.E. die Existenz einer Zerlegung $A \cong \tilde{B}_1 \oplus \tilde{A}'_1$,

$\tilde{A}_1' \cong \bigoplus_{i=1}^m L_{i1} \cong \dots \cong \bigoplus_{i=1}^m L_{im}$ angenommen werden. Man zeigt ohne Mühe, daß $m\tilde{A}_1' \cong (m-1)A$ gilt. Wir haben also $mA \cong m\tilde{B}_1 \oplus m\tilde{A}_1' \cong m\tilde{B}_1 \oplus m\tilde{B}_1'$, wobei $B \cong \tilde{B}_1 \oplus \tilde{B}_1'$. Mit Hilfe von 3.3 finden wir Zerlegungen $m\tilde{A}_1' \cong F_1 \oplus G$, $m\tilde{B}_1' \cong F_2 \oplus H$, derart, daß $F_1 \cong F_2$, $G \oplus H \cong m\tilde{B}_1$, $\chi_o(G \oplus H) \subsetneq m\tilde{B}_1$, also mit $L := \overline{\chi_o(G \oplus H)}$, $L \cong mL \cong L \oplus G \cong L \oplus H$, $G \oplus H \oplus m\tilde{B}_1 \cong m\tilde{B}_1$. Wegen 5.5 gilt dann $G \oplus H \cong \tilde{B}_1$, $\chi_o(G \oplus H) \subsetneq \tilde{B}_1$ und somit auch $L \oplus \tilde{B}_1 \cong \tilde{B}_1$. Offenbar ist $m\tilde{A}_1' \oplus mL \cong m\tilde{B}_1' \oplus mL$, $m\tilde{A}_1' \oplus mL \cong (m-1)A \oplus mL \cong (m-1)A$. Mit $A := A_1 \oplus A_1'$, $A_1 \cong \tilde{B}_1$, $A_1' \cong \tilde{A}_1' \oplus L$, $B := B_1 \oplus B_1'$, $B_1 \cong \tilde{B}_1$, $B_1' \cong \tilde{B}_1' \oplus L$ ist der erste Schritt beendet.

Im zweiten Schritt konstruieren wir induktiv für $k = 1, 2, \dots$ Zerlegungen $A = A_1 \oplus A_1'$, $B = B_1 \oplus B_1'$, $A_k = A_{k+1} \oplus A_{k+1}'$, $B_k = B_{k+1} \oplus B_{k+1}'$, so daß $A_k \cong B_k$, $mA_k' \cong mB_k'$, $(m+k-1)A_k' \cong (m-1)A$.

Für $k = 1$ ist dies die Behauptung des ersten Schrittes.

Sei bereits die Existenz von $A_1, A_1', A_2, A_2', \dots, A_k, A_k', B_1, B_1', B_2, B_2', \dots, B_k, B_k'$ mit obigen Eigenschaften gesichert. Weil $mA_k' \cong mB_k'$ gilt, gibt es wie im ersten Schritt Zerlegungen $A_k' = A_{k+1} \oplus A_{k+1}'$, $B_k' = B_{k+1} \oplus B_{k+1}'$, so daß $A_{k+1} \cong B_{k+1}$, $mA_{k+1}' \cong mB_{k+1}'$, $mA_{k+1}' \cong (m-1)A_k'$.

Da $(m+k)A_{k+1}' \cong (m-1)A_k' \oplus kA_k' \cong (m-1+k)A_k'$ gilt, ist die Induktion fertig.

Sei $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_i \subset \hat{A} \subset A$, $\hat{A} \oplus W = A$. Wegen 5.17 existieren für $j = 1, \dots, n$ χ_o -wesentlich erzeugte Untermoduln D_j' von D_j mit $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_i \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} B_i \cong \bigoplus_{j=1}^n D_j'$. Sei $D_j' \subset \hat{D}_j' \subset D_j$. Dann ist aufgrund der Voraussetzung $\hat{A} \cong \bigoplus_{j=1}^n \hat{D}_j'$.

W läßt sich für alle $k \in \mathbb{N}$ nach A_k' -einbetten. Weil $2A$ χ_o -quasistetig ist, folgt mit 0.4, daß sogar $W \cong A_k'$ für $k \in \mathbb{N}$. Somit gilt: $kW \cong (m+k-1)A_k' \cong (m-1)A \cong mB$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Mit 3.5 folgt $\chi_o W \subsetneq (m-1)A$, $W \cong A$, d.h. $(m-1)A \oplus W \cong (m-1)A$, also auch $mB \oplus W \cong mB$. Mit 5.4 und 5.5 folgt $B \oplus W \cong B$ und somit $A = \hat{A} \oplus W \cong \bigoplus_{j=1}^n \hat{D}_j' \oplus W \cong B \oplus W \cong B$.

Für $mA \cong mB$ folgt aus 5.14, 5.16 und 0.4, daß $2mA$ χ_o -quasistetig, A B - χ_o -injektiv und B A - χ_o -injektiv ist. Aus obigem ergibt sich $A \cong B \cong A$, also wegen 2.3 $A \cong B$. $\#$

Der Beweis von 5.18 greift eine Idee von K.Goodearl in ([5], Th.14.30) auf. Goodearl zeigt hier, daß Wurzelziehen für endlich erzeugte, projektive Moduln über beidseitig χ_o -stetigen, regulären Ringen möglich ist. Diese Moduln besitzen die Kürzungseigenschaft, die für Moduln mit den Voraussetzungen von 5.18 keineswegs gelten muß. Die zahlreichen Hindernisse, die für bei Durchführung seiner

Idee auftreten, konnten mit den im Beweis von 5.18 benutzten Ergebnissen überwunden werden.

Eine Erweiterung von 5.18 bedeutet 5.19. Für den Beweis dieses Lemmas, welches den beiden anschließenden Sätzen zugrunde liegt, sind neben 5.17 die Sätze 5.14 und 5.16 von großer Bedeutung.

5.19 Lemma

Sei R ein Rechts-ZP-Ring oder rechts kohärent, N ein χ_o -quasistetiger, χ_o -wesentlich erzeugter Untermodul eines freien R -Moduls. Seien für $i = 1, \dots, n$ A_i und B_i bis auf Isomorphie direkte Summanden von N mit der endlichen Austausch-eigenschaft. Dann gilt für $A := \bigoplus_{i=1}^n A_i$, $B := \bigoplus_{i=1}^n B_i$:

Ist $mA \cong (\bigoplus_{i=1}^n) mB$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so ist auch $A \cong (\bigoplus_{i=1}^n) B$.

Beweis

Aufgrund von 5.4 ist die Annahme

$A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n \oplus N$, $B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_n \oplus N$, also auch
 $A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n \oplus N$, $B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_n \oplus N$ möglich.

Für $i = 1, \dots, n$ ist mit 4.20 bzw. 4.16 $A_i \cap B_i$ χ_o -wesentlich erzeugt.

Wir bilden $A_i \cap B_i \subseteq \overline{A_i \cap B_i^A} \subseteq A_i$, $\overline{A_i \cap B_i^A} \oplus V_i := A_i$, $A_i \cap B_i \subseteq \overline{A_i \cap B_i^B} \subseteq B_i$,
 $\overline{A_i \cap B_i^B} \oplus W_i := B_i$ derart, daß $\overline{A_i \cap B_i^A} \subseteq \overline{A_{i+1} \cap B_{i+1}^A}$, $\overline{A_i \cap B_i^B} \subseteq \overline{A_{i+1} \cap B_{i+1}^B}$.

Für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ist $V_i \cap W_j = 0$, d.h. $V_i W_j$ - χ_o -injektiv und $W_j V_i$ - χ_o -injektiv. Da wegen 0.6 $\overline{A_i \cap B_i^A} \cong \overline{A_i \cap B_i^B}$ gilt, haben wir

$mA \cong m(\bigoplus_{i=1}^n \overline{A_i \cap B_i^A}) \oplus m(\bigoplus_{i=1}^n V_i) \cong (\bigoplus_{i=1}^n) m(\bigoplus_{i=1}^n \overline{A_i \cap B_i^A}) \oplus m(\bigoplus_{i=1}^n W_i)$. 5.5 beweist die Existenz von Zerlegungen $m(\bigoplus_{i=1}^n V_i) \cong F_1 \oplus G$, $m(\bigoplus_{i=1}^n W_i) \cong F_2 \oplus H$, so daß $F_1 \cong (\bigoplus_{i=1}^n) F_2$, $G \oplus H \oplus (\overline{A_n \cap B_n})^A$, $\chi_o(G \oplus H) \subseteq (\overline{A_n \cap B_n})^A$. Es folgt mit

$L := \overline{\chi_o(G \oplus H)}$ $mL \cong L \cong L \oplus H \cong L \oplus G$, $L \oplus (\overline{A_n \cap B_n})^A \cong (\overline{A_n \cap B_n})^A$, d.h.
 $T := m(\bigoplus_{i=1}^n V_i) \oplus mL \cong (\bigoplus_{i=1}^n) m(\bigoplus_{i=1}^n W_i) \oplus mL =: T'$.

Weil $A_n \oplus L \cong A_n$, $B_n \oplus L \cong B_n$ und $L \oplus L$ χ_o -quasistetig sind, sowie $V_i \subseteq A_n$, $W_j \subseteq B_n$, für $i, j = 1, \dots, n$ gilt, ist wegen 0.4 $L V_i$ - χ_o -injektiv, $V_i L$ - χ_o -injektiv, $L W_j$ - χ_o -injektiv, $W_j L$ - χ_o -injektiv und $L L$ - χ_o -injektiv.

Wir zeigen, daß kT χ_o -quasistetig ist für alle $k \in \mathbb{N}$.

5.8 a) besagt, daß $T' V_i$ - χ_o -injektiv, $T' L$ - χ_o -injektiv ist für $i = 1, \dots, n$. Weil $T \subseteq T'$ gilt, ist also $V_i V_j$ - χ_o -injektiv, $V_i L$ - χ_o -injektiv und $L L$ - χ_o -injektiv für $i, j \in \{1, \dots, n\}$. 5.14 bzw. 5.16 ergeben die χ_o -Quasistetigkeit von kT für alle $k \in \mathbb{N}$.

Weil $V_i W_j$ - X_O -injektiv, $L W_j$ - X_O -injektiv, $V_i L$ - X_O -injektiv und $L L$ - X_O -injektiv ist, ist wegen 5.8 a) $T W_j$ - X_O -injektiv und $T L$ - X_O -injektiv für $j = 1, \dots, n$.

Wir zeigen, daß T' T - X_O -injektiv ist:

Weil $X_O(T) \ni T$ X_O -quasistetig ist und wegen 5.8 a) reicht es, hierfür zu zeigen, daß $W_j T$ - X_O -g-injektiv und $L T$ - X_O -g-injektiv ist.

Sei zunächst R Rechts-ZP-Ring, $U \subseteq T$, $U \in X_O(T)$, $\langle u_1, u_2, \dots \rangle \subseteq U$ und f ein Homomorphismus von U nach W_j . Ähnlich wie in 4.20 finden wir direkte Summanden $L_i \subseteq u_i R$, $\bar{L}_i \subseteq \overline{u_i R} \subseteq T$, so daß $U' := \sum_{i \in \mathbb{N}} \bar{L}_i = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \bar{L}_i$, $\bigoplus_{i=1}^{n-1} \bar{L}_i + u_n R = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \bar{L}_i \oplus L_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit 4.3 folgt induktiv, daß $\sum_{i=1}^n u_i R \subseteq \bigoplus_{i=1}^n \bar{L}_i$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $\sum_{i \in \mathbb{N}} u_i R \subseteq U'$ und somit $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} L_i \subseteq U$. Wegen 5.9 ist $W_j T$ -1-g-injektiv und wegen 5.12 a) sogar T -1-injektiv. Somit läßt sich $f|_{\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} L_i}$ zu einem Homomorphismus f' von $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \bar{L}_i$ nach W_j hochheben. Weil aufgrund von 4.20 der Schnitt des großen, lokal-direkten Summanden U' von T mit direkten Summanden von T X_O -wesentlich erzeugt ist, folgt mit 5.8 e), daß sich f' zu einem Homomorphismus $\bar{f}$ von T nach W_j hochheben läßt. Wegen 4.3 ist $\bar{f}$ auch eine Fortsetzung von f . Analog folgt, daß $L T$ - X_O -g-injektiv ist.

Ist R rechts kohärent, so ist mit 4.16 der Schnitt X_O -wesentlich erzeugter Untermoduln von T mit direkten Summanden von T X_O -wesentlich erzeugt. Aus 5.8 e) folgt, daß $W_j T$ - X_O -g-injektiv und $L T$ - X_O -g-injektiv ist.

Das vorangehende Lemma beweist, daß $\bigoplus_{i=1}^n V_i \oplus L \cong (\bigoplus_{i=1}^n W_i \oplus L)$ und somit $A \cong \bigoplus_{i=1}^n \overline{A_i \cap B_i}^A \oplus \bigoplus_{i=1}^n V_i \cong \bigoplus_{i=1}^n \overline{A_i \cap B_i}^A \oplus L \oplus \bigoplus_{i=1}^n V_i \cong (\bigoplus_{i=1}^n W_i \oplus L) \oplus \bigoplus_{i=1}^n \overline{A_i \cap B_i}^B \oplus \bigoplus_{i=1}^n W_i \cong B$. $\square$

5.20 Satz

Sei R ein Rechts-ZP-Ring oder rechts kohärent, M ein X_O -stetiger, X_O -wesentlich erzeugter Untermodul eines freien R -Moduls.

Ist $mM \cong mN$ für einen Modul N und ein $m \in \mathbb{N}$, so gilt $M \cong N$.

Beweis

Wegen 4.14 bzw. 4.17 hat M , also N die endliche Austauschenschaft, d.h. $N \cong \bigoplus_{i=1}^m M_i'$, $M_i' \subseteq M$. Aus 5.19 folgt die Behauptung. $\square$

5.21 Satz

Sei R ein rechts X_O -stetiger, rechts kohärenter Ring, M und N endlich erzeugte, projektive R -Moduln. Ist $mM \cong (\bigoplus_{i=1}^m mN)$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so gilt $M \cong (\bigoplus_{i=1}^m N)$.

Beweis

R und damit M und N sind isomorph zu einer endlichen direkten Summe von durch Idempotente erzeugten Rechtsidealen von R . 5.19 liefert die Behauptung. $\#$

Das Ergebnis von 5.21 wurde von Goodearl für endlich erzeugte, projektive Moduln über einem regulären, rechts $\mathcal{X}_0$ -stetigen, direkt finiten Ring über die Struktur seiner Grothendieckgruppe bewiesen. In Kapitel 6 wird ein rechts $\mathcal{X}_0$ -stetiger, rechts kohärenter Ring, welcher nicht regulär und nicht direkt finit ist, angegeben.

§4 Isomorphie von Hüllen

Lemma 5.22 schafft die Grundlage für einen wichtigen Struktursatz, in welchem die Isomorphie von 'Hüllen' χ_o -wesentlich erzeugter Untermoduln eines χ_o quasistetigen, projektiven Moduls über einem Rechts-ZP-Ring oder einem rechts kohärenten Ring bewiesen wird. Ausgehend von diesem Struktursatz werden Interpolationseigenschaften solcher Moduln gezeigt und Charakterisierungen von ' χ_o -stetig' möglich sein.

5.22 Lemma

Sei M ein χ_o -quasistetiger Modul, so daß χ_o -wesentlich erzeugte, direkte Summanden von M die innere Austauschenschaft besitzen. Sei T eine Menge von χ_o -wesentlich erzeugten Untermoduln von M , für die gilt:

T ist abgeschlossen bezüglich Isomorphie und zu Elementen $U, V \in T$ mit $U \cong V$ gibt es ' $U, V \in \chi_o(M)$ derart, daß ' $U \cap U \subseteq U, U, V \cap V \subseteq V, V, U \cong V, U \cap W \in T$ für alle χ_o -wesentlich erzeugten, direkten Summanden W von M . Dann gilt für $A, B \in T$: Ist $A \cong B$, so auch $\bar{A} \cong \bar{B}$.

Beweis

Sei $A, B \in T, A \cong B, A \subseteq \bar{A} \subseteq M, B \subseteq \bar{B} \subseteq M$. Es existiert ein Isomorphismus $f: A \longrightarrow B$ und wegen 0.6 gilt ' $\bar{A} \cong \bar{A}, \bar{B} \cong \bar{B}$. Nach Voraussetzung ist $D = A \cap \bar{B} \in T$. Sei $D \subseteq \bar{D}^A \subseteq \bar{A}, \bar{D}^A \oplus X = \bar{A}, D \subseteq \bar{D}^B \subseteq \bar{B}, \bar{D}^B \oplus Y = \bar{B}$. Es ist $\bar{D}^A \cong \bar{D}^B, \bar{A} \cap Y = \bar{B} \cap X = 0$.

Wir zeigen nun die Existenz von Zerlegungen

$$X = X_1' \oplus X_1'', \quad X_n'' = X_{n+1}' \oplus X_{n+1}'', \quad Y = Y_1' \oplus Y_1'', \quad Y_n'' = Y_{n+1}' \oplus Y_{n+1}'', \\ \bar{D}^A = D_1' \oplus D_1'', \quad D_n'' = D_{n+1}' \oplus D_{n+1}'', \quad X_n' \cong Y_n', \quad D_{2n-1}' \cong X_{2n-1}', \quad D_{2n}' \cong Y_{2n}':$$

Weil ' $A \cap X, D \in \chi_o(M)$, $(A \cap X) \oplus D \subseteq A$ haben wir $\overline{(A \cap X) \oplus D} = \bar{B}$. Da $(A \cap X) \cap \overline{(A \cap X)} \subseteq X \cap \bar{B} = 0$, folgt mit 0.7 $\overline{A \cap X} = X \cong \overline{(A \cap X)}$, d.h. $\bar{B} \cong X \oplus \overline{(D)} \cong Y \oplus \bar{D}^B \cong Y \oplus \bar{D}^A, D \in T$. Da ' $\bar{B}$ die innere Austauschenschaft besitzt, existieren Zerlegungen $Y = Y_1' \oplus Y_1'', \bar{D}^A = D_1' \oplus D_1''$, so daß $Y_1' \oplus D_1'' \cong \overline{(D)}, Y_1' \oplus D_1' \cong X$. Sei $g_1: Y_1' \oplus D_1'' \longrightarrow \overline{(D)}$ ein Isomorphismus und $X = X_1' \oplus X_1'', Y_1' \cong X_1', h_1: D_1' \longrightarrow X_1''$ ein Isomorphismus.

Sei $E_1 = g_1^{-1} f(D)$. Weil $D \in T, E_1 \cong D$ ist, existieren ' $E_1, D \in \chi_o(M)$ derart, daß ' $E_1 \cap E_1 \subseteq E_1, E_1, D \cap D \subseteq D, D, E_1 \cong D, E_1 \cap W \in T$ für alle $\chi_o(M) \ni W \subseteq M$. Wegen 0.6 gilt ' $\bar{D} \cong \bar{D}^A$.

Wir betrachten folgende Verknüpfung von Homomorphismen:

$$f_1: 'E_1 \xrightarrow{k_1} 'D \subseteq ' \bar{D} \cong \bar{D}^A = D_1' \oplus D_1'' \xrightarrow{h_1 \oplus \text{id}} X_1' \oplus D_1'':$$

f_1 ist ein großer Monomorphismus. Da $E_1 \subseteq Y_1' \oplus D_1''$, ist $'E_1 \cap Y_1'' \subseteq Y_1''$, $'E_1 \cap D_1' \subseteq D_1'$ und $(E_1 \cap Y_1') \oplus (E_1 \cap D_1'') \subseteq 'E_1$. Wir erhalten

$$\overline{f_1('E_1 \cap Y_1')} \oplus \overline{f_1('E_1 \cap D_1'')} = X_1' \oplus D_1'' = X_1' \oplus \overline{(E_1 \cap D_1'')}.$$

Dabei gilt $Y_1' \cap f_1(E_1 \cap Y_1') \subseteq Y_1' \cap (X_1' \oplus D_1'') = 0$, d.h. $Y_1'' \cong \overline{f_1('E_1 \cap Y_1')}$ und somit $X_1' \oplus D_1'' \cong Y_1'' \oplus \overline{f_1('E_1 \cap D_1'')}$, $'E_1 \cap D_1' \in T$.

Da $X_1' \oplus D_1''$ die innere Austausch Eigenschaft besitzt, existieren $D_1'' = D_2' \oplus D_2''$, $X_1' = X_2' \oplus X_2''$ und ein Isomorphismus g_2 , so daß $X_2'' \oplus D_2'' \stackrel{g_2}{\cong} \overline{f_1('E_1 \cap D_1'')}$, $X_2' \oplus D_2' \cong Y_1''$. Sei $Y_1'' = Y_2' \oplus Y_2''$ mit $D_2' \stackrel{h_2}{\cong} Y_2'$, $X_2' \cong Y_2'$.

Sei $E_2 := g_2^{-1} f_1('E_1 \cap D_1'')$. Weil $(E_1 \cap D_1'') \in T$, $E_2 \cong (E_1 \cap D_1'')$ ist, existieren $L, 'E_2 \in X_0(M)$ derart, daß $(L \cap (E_1 \cap D_1'')) \subseteq L, (E_2 \cap E_2) \subseteq 'E_2, E_2, 'E_2 \stackrel{k_2}{\cong} L, 'E_2 \cap W \in T$ für alle $X_0(M) \ni W \in M$. Wegen Lemma 0.6 ist

$\bar{L} \cong \overline{(E_1 \cap D_1'')} = D_1''$. Wir betrachten folgende Verknüpfung von Homomorphismen:

$$f_2: 'E_2 \xrightarrow{k_2} L \subseteq \bar{L} \cong D_1'' = D_2' \oplus D_2'' \xrightarrow{h_2 \oplus \text{id}} Y_2'' \oplus D_2''.$$

Wie oben ergibt sich $\overline{f_2('E_2 \cap X_2'')} \oplus \overline{f_2('E_2 \cap D_2'')} = Y_2'' \oplus D_2''$. Dabei ist

$X_2'' \cap f_2('E_2 \cap X_2'') \subseteq X_2'' \cap (Y_2'' \oplus D_2'')$, $\bar{B} \cap (Y_2'' \oplus D_2'') \subseteq (Y_2'' \oplus D_2'')$, also mit $X_2'' \cap \bar{B} = 0$ auch $X_2'' \cap (Y_2'' \oplus D_2'') = X_2'' \cap f_2('E_2 \cap X_2'') = 0$, d.h.

$X_2'' \cong \overline{f_2('E_2 \cap X_2'')}$ und somit $X_2'' \oplus \overline{f_2('E_2 \cap D_2'')} \cong Y_2'' \oplus D_2''$, $'E_2 \cap D_2'' \in T$.

Sukzessive erhalten wir die behaupteten Zerlegungen.

Sei nun $X := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n' \oplus H$, $Y := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Y_n' \oplus K$. Es ist $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n' \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Y_n'$, da $X \cap Y = 0$.

Weil für $n \in \mathbb{N}$ $X = (X_1' \oplus \dots \oplus X_{2n-1}') \oplus X_{2n-1}''$ sowie $(X_1' \oplus \dots \oplus X_{2n-1}') \cap H = 0$,

läßt sich H für $n \in \mathbb{N}$ nach X_{2n-1}'' und wegen $X_{2n-1}'' \cong D_{2n-1}'$ auch nach D_{2n-1}' einbetten. Da $H \in \mathcal{C}$, $X \cap D_{2n-1}' = 0$, folgt mit 0.4 sogar $H \in \mathcal{C} D_{2n-1}'$. Somit ist

$H \in \mathcal{C} \bar{D}^A$, $X_0 H \subseteq \bar{D}^A$, d.h. wegen 2.1 $\bar{D}^A \oplus H \cong \bar{D}^A$. Analog folgt $\bar{D}^A \oplus K \cong \bar{D}^A$.

Wir haben $\bar{A} \cong \bar{A} = X \oplus \bar{D}^A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n' \oplus H \oplus \bar{D}^A \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Y_n' \oplus \bar{D}^A \cong$
 $\cong \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Y_n' \oplus K \oplus \bar{D}^A \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Y_n' \oplus K \oplus \bar{D}^B = \bar{B} \cong \bar{B}.$

■

Die Ursprünge des obigen Beweises liegen in ([10], Th.5). Kutami zeigt in dieser Arbeit die Aussage von Lemma 5.22 für X_0 -quasistetige, projektive, direkt finite Moduln über einem regulären Ring. Sein Beweis wiederum ist eine Fortentwicklung einer Idee von K. Goodearl in ([7], Th.1.4). Ein wesentlicher Unterschied zu dem Beweis von Kutami besteht unter anderem darin, daß die 'Reste' H und K aufgrund früherer Ergebnisse von $\bar{D}^A$ 'verschluckt' werden.

Die Aussage von 5.23 ist für rechts kohärente Ringe nun leicht zu beweisen. Für Rechts-ZP-Ringe besteht der 'Clou' des Beweises in dem schrittweisen Zeigen der Isomorphie der 'Hüllen' für zunächst zyklische Untermoduln und dann χ_o -wesentlich erzeugte Untermoduln.

5.23 Satz

Sei R ein Rechts-ZP-Ring oder rechts kohärent, M ein χ_o -quasistetiger Untermodul eines freien R-Moduls. Dann gilt für χ_o -wesentlich erzeugte Untermoduln A und B von M:

Ist $A \cong (\subsetneq) B$, so ist $\bar{A} \cong (\subsetneq) \bar{B}$.

Beweis

Sei zunächst $A \cong B$ und R Rechts-ZP-Ring. Wegen 4.22 besitzen χ_o -wesentlich erzeugte, direkte Summanden von M die innere Austauscheigenschaft.

Wir betrachten die Menge T aller zyklischen Untermoduln von M:

Da der Schnitt zyklischer Untermoduln von M mit direkten Summanden von M zyklisch ist, kann 5.22 angewendet werden, d.h. für $u, v \in M$, $uR \cong vR$, gilt $\overline{uR} \cong \overline{vR}$.

Sei jetzt T die Menge aller χ_o -wesentlich erzeugten Untermoduln von M,

$U, V \in T$, $U \stackrel{f}{\cong} V$, $\langle u_1, u_2, \dots \rangle \subset U$. Ähnlich wie in 4.20 finden wir direkte Summanden $L_i \subset u_i R$, $\bar{L}_i \subset \overline{u_i R}$, so daß $'U := \sum_{i \in \mathbb{N}} \bar{L}_i = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \bar{L}_i$, $\bigoplus_{i=1}^{n-1} \bar{L}_i + u_n R = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \bar{L}_i \oplus L_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit 4.3 folgt induktiv, daß $\sum_{i=1}^n u_i R \subset \bigoplus_{i=1}^n \bar{L}_i$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $\sum_{i \in \mathbb{N}} u_i R \subset 'U$. Offenbar ist auch $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} L_i \subset U$. Wir definieren $f(L_i) := G_i$ und erhalten $\bar{L}_i \cong \bar{G}_i$, d.h. $'U = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \bar{L}_i \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \bar{G}_i := 'V$. Klar gilt $'U \cap U \subset 'U, U$ und auch $'V \cap V \subset 'V, V$. $'U$ ist lokal-direkter Summand in M, der Schnitt mit χ_o -wesentlich erzeugten, direkten Summanden von M wegen 4.20 also χ_o -wesentlich erzeugt. Mit 5.22 folgt $\bar{U} \cong \bar{V}$.

Sei nun R rechts kohärent, T die Menge aller χ_o -wesentlich erzeugten Untermoduln von M. Weil χ_o -wesentlich erzeugte direkte Summanden von M wegen 4.22 die innere Austauscheigenschaft besitzt, und T wegen 4.16 die Bedingungen von 5.22 erfüllt, ist die Behauptung für $A \cong B$ bewiesen.

Sei nun $A \subsetneq B$, $f: A \longrightarrow B$ ein Monomorphismus, $\bar{f}(\bar{A}) \oplus C := B$. Es folgt $\bar{A} \cong \bar{f}(\bar{A})$, d.h. $\bar{A} \subsetneq \bar{B}$.

■

Satz 5.23 beantwortet die von K. Goodearl in ([5], problems) gestellte Frage, ob für endlich erzeugte Untermoduln A_i, B_i ($i \in \mathbb{N}$) eines regulären, rechts χ_o -stetigen Ringes

mit $A_i \cong B_i$, $\sum_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_i$, $\sum_{i \in \mathbb{N}} B_i = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} B_i$, auch $\overline{\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_i} \cong \overline{\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} B_i}$ gilt. Zudem verbessert 5.23, wie bereits oben bemerkt, Theorem 5 in [10].

§5 Die abzählbare Interpolationseigenschaft

Die abzählbare Interpolationseigenschaft wird in [6] für unit-reguläre Ringe definiert. Eine Verallgemeinerung dieser Definition auf beliebige Moduln stellt 5.24 dar.

5.24 Definition

Ein Modul M hat die abzählbare Interpolationseigenschaft, wenn es für Familien $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Moduln mit $A_j \overset{\oplus}{\hookrightarrow} B_i \overset{\oplus}{\hookrightarrow} M$ für alle $j, i \in \mathbb{N}$, einen Modul C gibt, so daß $A_j \overset{\oplus}{\hookrightarrow} C \overset{\oplus}{\hookrightarrow} B_i$ für alle $j, i \in \mathbb{N}$.

5.25 Lemma

Sei R ein Rechts-ZP-Ring oder rechts kohärent, M ein χ_0 -stetiger, χ_0 -wesentlich erzeugter Untermodul eines freien R -Moduls, und für Untermoduln L_i ($i \in \mathbb{N}$), D_1, E_1 von M gelte $M = D_1 \oplus \overline{\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} L_i} \cong E_1 \oplus \overline{\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} L_i}$ und mit $L^n := \overline{\bigoplus_{i \geq n} L_i}$ $D_1 \oplus L^n \cong E_1 \oplus L^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es einen direkten Summanden $E'' \subseteq E_1$, so daß $E_1 \overset{\oplus}{\hookrightarrow} D_1 \oplus E''$, $E'' \overset{\oplus}{\hookrightarrow} E_1 \oplus L^n$, $\chi_0 E'' \subsetneq E_1 \oplus L^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis

Wegen 3.3 gibt es Zerlegungen $D_1 = D'_1 \oplus D_2$, $E_1 = E'_1 \oplus E_2$ mit $D'_1 \cong E'_1$, $D_2 \oplus E_2 \overset{\oplus}{\hookrightarrow} L^1$, $\chi_0(D_2 \oplus E_2) \subsetneq L^1$. Weil $D_2 \oplus (E'_1 \oplus L^2) \cong E_2 \oplus (E'_1 \oplus L^2)$ gilt, existieren Zerlegungen $D_2 = D'_2 \oplus D_3$, $E_2 = E'_2 \oplus E_3$ mit $D'_2 \cong E'_2$, $D_3 \oplus E_3 \overset{\oplus}{\hookrightarrow} (E'_1 \oplus L^2)$, $\chi_0(D_3 \oplus E_3) \subsetneq (E'_1 \oplus L^2)$. Sukzessive finden wir für alle $n \in \mathbb{N}$ Zerlegungen $D_n = D'_n \oplus D_{n+1}$, $E_n = E'_n \oplus E_{n+1}$ mit $D'_n \cong E'_n$, $(D_{n+1} \oplus E_{n+1}) \overset{\oplus}{\hookrightarrow} (\bigoplus_{i=1}^{n-1} E'_i \oplus L^n)$, $\chi_0(D_{n+1} \oplus E_{n+1}) \subsetneq (\bigoplus_{i=1}^{n-1} E'_i \oplus L^n)$.

Sei $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} D'_i \subseteq D' \subseteq D_1$, $D' \oplus D'' := D_1$, $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} E'_i \subseteq E' \subseteq E_1$, $E' \oplus E'' := E_1$. Wegen 5.23 ist $D' \cong E'$, also $D_1 \oplus E'' \cong E_1 \oplus D''$. E'' läßt sich für alle $n \in \mathbb{N}$ nach E_n einbetten. Somit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ $\chi_0 E'' \subsetneq (\bigoplus_{i=1}^{n-1} E'_i \oplus L^n) \subseteq E_1 \oplus L^n$. **

5.26 Lemma

Sei R ein Rechts-ZP-Ring oder rechts kohärent, $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Familien von Moduln mit $A_j \overset{\oplus}{\hookrightarrow} B_i$ für $j, i \in \mathbb{N}$. Zudem gebe es für je endlich viele B_i einen χ_0 -stetigen, χ_0 -wesentlich erzeugten Untermodul eines freien R -Moduls, in dem diese B_i bis auf Isomorphie direkte Summanden sind. Dann existiert ein Modul C , so daß $A_j \overset{\oplus}{\hookrightarrow} C \overset{\oplus}{\hookrightarrow} B_i$ für alle $j, i \in \mathbb{N}$.

Beweis

Wegen 3.8 existiert ein X_1 , so daß $A_1, A_2 \overset{\circ}{\hookrightarrow} X_1 \overset{\circ}{\hookrightarrow} B_1, B_2$. Dann existiert ein X_2 , so daß $X_1, A_3 \overset{\circ}{\hookrightarrow} X_2 \overset{\circ}{\hookrightarrow} B_1, B_2$. Sukzessive erhält man für alle $n \in \mathbb{N}$ Moduln X_n , so daß $X_1 \overset{\circ}{\hookrightarrow} X_2 \overset{\circ}{\hookrightarrow} \dots \overset{\circ}{\hookrightarrow} X_n$ und $A_1, \dots, A_{n+1} \overset{\circ}{\hookrightarrow} X_n \overset{\circ}{\hookrightarrow} B_1, B_2$. Aufgrund von 3.5 gibt es Familien von Untermoduln $(T_{1j})_{j \in \mathbb{N}}$ von B_1 , $(T_{2j})_{j \in \mathbb{N}}$ von B_2 , so daß $T_{1j} \cong T_{2j}$, $X_n \cong \sum_{j=1}^n T_{1j} = \bigoplus_{j=1}^n T_{1j} \overset{\circ}{\hookrightarrow} B_1$, $\sum_{j=1}^n T_{2j} = \bigoplus_{j=1}^n T_{2j} \overset{\circ}{\hookrightarrow} B_2$ für $n \in \mathbb{N}$. Wegen 5.23 folgt $Y_1 := \overline{\bigoplus_{j \in \mathbb{N}} T_{1j}} \cong \overline{\bigoplus_{j \in \mathbb{N}} T_{2j}}$, also $A_j \overset{\circ}{\hookrightarrow} Y_1 \overset{\circ}{\hookrightarrow} B_1, B_2$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Analog erhält man ein Y_2 mit $A_j \overset{\circ}{\hookrightarrow} Y_2 \overset{\circ}{\hookrightarrow} Y_1, B_3$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und sukzessive für alle $n \in \mathbb{N}$ Moduln Y_n , so daß $Y_n \overset{\circ}{\hookrightarrow} \dots \overset{\circ}{\hookrightarrow} Y_1$ und $A_j \overset{\circ}{\hookrightarrow} Y_n \overset{\circ}{\hookrightarrow} B_1, B_2, \dots, B_{n+1}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Wegen 3.7 existieren Familien von Moduln $({}^jL_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(H_j)_{j \in \mathbb{N}}$ und Moduln jL , so daß ${}^jL_i \cong {}^kL_i$ für $j, k \in \mathbb{N}$, $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} {}^jL_i \overset{\circ}{\hookrightarrow} {}^jL$, $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} {}^jL_i$ lokal-direkt, $A_j \oplus H_j \oplus {}^jL \cong Y_1$ und mit ${}^jL^n := \overline{\bigoplus_{i \geq n} {}^jL_i}$ $A_j \oplus H_j \oplus {}^jL^n \cong Y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aufgrund von 5.23 kann ${}^jL = L$, ${}^jL^n = L^n$, ${}^jL_i = L_i$ gesetzt werden.

5.25 besagt, daß es einen direkten Summanden $W_1 \overset{\circ}{\hookrightarrow} (A_2 \oplus H_2)$ gibt, so daß $(A_2 \oplus H_2) \overset{\circ}{\hookrightarrow} (A_1 \oplus H_1 \oplus W_1)$, $W_1 \overset{\circ}{\hookrightarrow} (A_1 \oplus H_1 \oplus L^n) \cong Y_n$, $\chi_o W_1 \subsetneq Y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also insbesondere $(A_1 \oplus H_1 \oplus W_1) \oplus L^n \cong Y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nochmaliges Anwenden von 5.25 liefert die Existenz eines direkten Summanden W_2 von $A_3 \oplus H_3$, so daß $A_3 \overset{\circ}{\hookrightarrow} (A_1 \oplus H_1 \oplus W_1 \oplus W_2)$, $W_2 \overset{\circ}{\hookrightarrow} Y_n$, $\chi_o W_2 \subsetneq Y_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Sukzessive erhalten wir Moduln $W_1, W_2, \dots$, so daß $A_n \overset{\circ}{\hookrightarrow} (A_1 \oplus H_1 \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-1} W_i)$, $W_i \overset{\circ}{\hookrightarrow} Y_n$, $\chi_o W_i \subsetneq Y_n$ für $i, n \in \mathbb{N}$. Offenbar gilt nun mit 2.1 und 0.4:

$\chi_o \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} W_i \subsetneq Y_n$, $\chi_o \overline{\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} W_i} \subsetneq Y_n$, $Y_n \oplus \overline{\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} W_i} \cong Y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} W_i$ lokal-direkt in $\overline{\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} W_i}$.

Für $C := A_1 \oplus H_1 \oplus \overline{\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} W_i}$ gilt:

$A_j \overset{\circ}{\hookrightarrow} C$ für alle $j \in \mathbb{N}$, und $C \oplus L^n \cong Y_n \oplus \overline{\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} W_i} \cong Y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also

$C \overset{\circ}{\hookrightarrow} B_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

■

Die zwei folgenden Sätze sind Folgerungen aus 5.26.

5.27 Satz

Sei R ein Rechts-ZP-Ring oder rechts kohärent, M ein χ_o -stetiger, χ_o -wesentlich erzeugter Untermodul eines freien R -Moduls. Dann ist M ein Modul mit der abzählbaren Interpolationseigenschaft.

5.28 Satz

Ist R ein rechts kohärenter, rechts χ_0 -stetiger Ring, so hat R_R die abzählbare Interpolationseigenschaft.

Satz 5.28 verbessert Theorem 3.2 von Goodearl in [7], wo die abzählbare Interpolationseigenschaft für reguläre, rechts χ_0 -stetige, direkt finite Ringe mittels ihrer Grothendieckgruppe gezeigt wird.

Es sei bemerkt, daß Ringe die rechts die abzählbare Interpolationseigenschaft besitzen, diese auch links besitzen, weil für $e = e^2 \in R$, $f = f^2 \in R$ mit $eR \cong fR$ auch $Re \cong Rf$ folgt. Auf die Seitenangabe kann also verzichtet werden.

§6 Eine Charakterisierung der X_0 -Stetigkeit

Lemma 5.29 findet in zwei wichtigen Sätzen Anwendung. Interessanterweise kommt beim Beweis die schwache lokale Semi-t-Nilpotenz zum Einsatz.

5.29 Lemma

Sei $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ ein X_0 -quasistetiger Modul mit endlich wesentlich erzeugten Summanden M_i . Sei $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$, $V_i \cong M_i$, ein großer, lokal-direkter Summand von M . Dann ist $V = M$.

Beweis

Sei für eine Teilmenge J von I $\bigoplus_{i \in J} M_i$ bzw. $\bigoplus_{i \in J} V_i$ durch $M(J)$ bzw. $V(J)$ bezeichnet. Wir zeigen im ersten Schritt durch Widerspruch, daß es zu jeder endlichen Teilmenge J_1 von I eine endliche Teilmenge $\hat{J}_1$ von I gibt, so daß $J_1 \subset \hat{J}_1$ und $V(\hat{J}_1) \cap M(J_1) \cong M(J_1)$:

Sei $0 \neq y_1 \in M(J_1)$, $y_1 R \cap V(J_1) = 0$. Es existiert $0 \neq x_1 \in y_1 R$ mit $x_1 \in V$, also $x_1 \in V(I_1)$ für $I_1 \subset I$, $|I_1| < \infty$. Für $J_2 := J_1 \cup I_1$ gilt offenbar $J_2 \setminus J_1 \neq \emptyset$ und $x_1 R$ läßt sich nach $V(J_2 \setminus J_1)$ einbetten. Sei $x_1 R \cong \overline{x_1 R} \oplus M(J_1) \cong V(J_1)$, $\overline{x_1 R} \oplus X_1 := M(J_1)$. Wegen $V(J_1) \cap V(J_2 \setminus J_1) = 0$ gilt mit 0.4 sogar $\overline{x_1 R} \cong V(J_2 \setminus J_1) \cong M(J_2 \setminus J_1)$. Sei $0 \neq y_2 \in M(J_1)$, $y_2 R \cap V(J_2) = 0$.

O.E. kann $y_2 \in X_1$ angenommen werden, denn:

sei $y_2 = a + b$, $a \in \overline{x_1 R}$, $b \in X_1$. Klar ist $b \neq 0$. Gäbe es $r \in R$ mit $0 \neq br \in V(J_2)$, so fände man, weil $x_1 R \subset V(J_2)$, ein $s \in R$, so daß $0 \neq y_2 rs \in V(J_2)$ im Widerspruch zu $y_2 R \cap V(J_2) = 0$.

Zu y_2 existiert ein $0 \neq x_2 \in y_2 R$, so daß $x_2 \in V$, also $x_2 \in V(I_2)$ für $I_2 \subset I$, $|I_2| < \infty$. Für $J_3 := J_2 \cup I_2$ gilt $J_3 \setminus J_2 \neq \emptyset$ und $x_2 R$ läßt sich nach $V(J_3 \setminus J_2)$ einbetten. Sei $x_2 R \cong \overline{x_2 R} \oplus X_1$, $\overline{x_2 R} \oplus X_2 := X_1$. Wegen $V(J_1) \cap V(J_3 \setminus J_2) = 0$ gilt $\overline{x_2 R} \cong V(J_3 \setminus J_2) \cong M(J_3 \setminus J_2)$.

Sukzessive erhält man für alle $n \in \mathbb{N}$ endliche Teilmengen J_n von I , Untermoduln X_n von $M(J_1)$, von Null verschiedene Elemente x_n von $M(J_1)$ derart, daß $J_n \subset J_{n+1}$, $M(J_1) = \bigoplus_{i=1}^n \overline{x_i R} \oplus X_n$, $X_n = \overline{x_{n+1} R} \oplus X_{n+1}$, $\overline{x_n R} \cong M(J_{n+1} \setminus J_n)$. . Offensichtlich ist $\sum_{i \in \mathbb{N}} \overline{x_i R} = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \overline{x_i R} \subset M(J_1)$ sowie $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \overline{x_i R} \cong M(I \setminus J_1)$. Wegen 0.4 folgt $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \overline{x_i R} \oplus M(J_1)$, was einen Widerspruch bedeutet, da $M(J_1)$ endlich wesentlich erzeugt ist.

Wir zeigen im zweiten Schritt durch Widerspruch die Behauptung des Lemmas: Sei $m_1 \in M(J_1)$ für eine endliche Teilmenge J_1 von I , m_1 nicht in V enthalten.

Wegen des ersten Schrittes existiert $\hat{I}_1 \subset I$, $J_1 \subset \hat{I}_1$, $|\hat{I}_1| < \infty$, so daß $M(J_1) \cap V(\hat{I}_1) \subsetneq M(J_1)$. Sei $V(\hat{I}_1) \oplus T_2 := M$, $m_1 = v_1 + t_2$, $v_1 \in V(\hat{I}_1)$, $t_2 \in T_2$, p_1 die Projektion von M auf T_2 . Offenbar ist $t_2 \notin V$ und $T_2 \cap M(J_1) = 0$. T_2 läßt sich mittels eines Monomorphismus f_2 nach $M(I \setminus J_1)$ einbetten. Wir betrachten die folgende Verknüpfung von Homomorphismen:

$g_1 : m_1 R \xrightarrow{p_1 | m_1 R} t_2 R \xrightarrow{f_2 | t_2 R} f_2(t_2 R)$. g_1 hat, weil $m_1 R \cap V(\hat{I}_1) \subsetneq m_1 R$ gilt, einen großen Kern. Zudem ist $m_2 := f_2(t_2) \neq 0$. Seien $m_2 \in M(J_2)$, $|J_2| < \infty$, $t_2 \in M(J_2')$, $|J_2'| < \infty$, $I_2 := J_1 \cup J_2 \cup J_2'$. Klar ist $J_1 \cap J_2 = \emptyset$. Zu I_2 existiert $I > \hat{I}_2 \supset I_2$, $|\hat{I}_2| < \infty$, so daß $M(I_2) \cap V(\hat{I}_2) \subsetneq M(I_2)$. Sei $V(\hat{I}_2) \oplus T_3 := M$, $t_2 = v_2 + t_3$, $v_2 \in V(\hat{I}_2)$, $t_3 \in T_3$, p_2 die Projektion von M auf T_3 . Es ist $t_3 \notin V$ und $T_3 \cap M(I_2) = 0$. T_3 läßt sich mittels eines Monomorphismus f_3 nach $M(I \setminus I_2)$ einbetten. Wir betrachten die folgende Verknüpfung von Homomorphismen:

$g_2 : f_2(t_2 R) \xrightarrow{(f_2 | t_2 R)^{-1}} t_2 R \xrightarrow{p_2 | t_2 R} t_3 R \xrightarrow{f_3 | t_3 R} f_3(t_3 R)$. g_2 hat einen großen Kern, weil $t_2 R \cap V(\hat{I}_2) \subsetneq t_2 R$ gilt. Zudem ist $m_3 := f_3(t_3) = g_2(f_2(t_2)) \neq 0$, da $t_3 \neq 0$ ist. Sukzessive erhalten wir Folgen von disjunkten endlichen Teilmengen J_n von I , von Elementen $m_n \in M(J_n)$ und eine Folge $m_1 R \xrightarrow{g_1} m_2 R \xrightarrow{g_2} m_3 R \xrightarrow{g_3} \dots$ von Homomorphismen g_n derart, daß $g_n(m_n) = m_{n+1} \neq 0$, $\text{Kern}(g_n) \subsetneq m_n R$.

Weil die J_n disjunkt sind, lassen sich für $m_n R \subsetneq \overline{m_n R} \subsetneq M(J_n)$ die Homomorphismen g_n zu Homomorphismen $\bar{g}_n$ von $\overline{m_n R}$ nach $\overline{m_{n+1} R}$ hochheben. Die $\bar{g}_n$ haben weiterhin einen großen Kern. Weil $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \overline{m_n R}$ χ_o -quasistetig ist, folgt mit 1.2 ein Widerspruch zur schwachen lokalen Semi- t -Nilpotenz von $(\overline{m_n R})_{n \in \mathbb{N}}$. #

Satz 5.30 wurde von Kutami in ([10], Cor. zu Th. 5) für χ_o -quasistetige, χ_o -wesentlich erzeugte, projektive, direkt finite Moduln über einem regulären Ring bewiesen. Dies ist ohne Mühe mit Theorem 5 in seiner Arbeit möglich. Analog ist der Beweis von 5.30 für χ_o -quasistetige, χ_o -wesentlich erzeugte Untermoduln eines freien Moduls über einem Rechts-ZP-Ring oder einem rechts kohärenten Ring mit Hilfe von 5.23 sehr leicht. Wird auf die Voraussetzung ' χ_o -wesentlich erzeugt' verzichtet, muß das nicht triviale Lemma 5.29 verwendet werden.

5.30 Satz

Sei R ein Rechts-ZP-Ring oder rechts kohärent, M ein χ_o -quasistetiger, χ_o -wesentlich erzeugter Untermodul eines freien R -Moduls oder M ein χ_o -quasistetiger, projektiver R -Modul. Dann sind äquivalent:

- a) M ist χ_o -stetig
 b) Jeder injektive, große Endomorphismus von M ist ein Isomorphismus.

Beweis

- b) $\Rightarrow$ a) Sei $M_1 \in \chi_o(M)$, $M_1 \subsetneq M$, $\bar{M}_1 \oplus C = M$. Wegen 5.23 ist $\bar{M}_1 \cong M_1$, d.h. $M \cong M_1 \oplus C \subsetneq M$. Es folgt $M_1 \oplus C = M$, d.h. $M_1 = \bar{M}_1$.
 a) $\Rightarrow$ b) Ist M χ_o -wesentlich erzeugt, so ist die Beh. klar. Ist M projektiv, χ_o -stetig, so ist mit 4.2 $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, M_i 1-wesentlich erzeugt. Sei $V = \bigoplus_{i \in I} V_i \subsetneq M$, $V_i \cong M_i$. Wegen 5.23 ist $\bar{V}_i \cong M_i \cong V_i$ und da $\bar{V}_i$ χ_o -stetig ist $V_i = \bar{V}_i$, d.h. V lokal-direkt. Mit 5.29 folgt $V = M$. #

Kutami zeigt in ([10], Th.9), daß χ_o -quasistetige, projektive, direkt finite Moduln über regulären Ringen, die das Komparabilitätsaxiom erfüllen (vergleiche ([5], Chap.8) bereits χ_o -stetig sind. Jedoch sind hierfür weder das Komparabilitätsaxiom noch die direkte Finitheit notwendige Voraussetzungen, wie Satz 5.31 verdeutlicht.

5.31 Satz

Über einem rechts endlich-stetigen, rechts kohärenten Ring R ist jeder χ_o -quasistetige, projektive Modul M bereits χ_o -stetig.

Beweis

R_R besitzt die endliche Austauscheigenschaft, M ist also wegen ([21], Th.1) direkte Summe von durch Idempotente erzeugten Rechtsidealen von R . Diese sind alle endlich-stetig. Aufgrund von 5.30 reicht es zu zeigen, daß M keinen echten, großen zu M isomorphen Untermodul enthält.

Sei also $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, M_i zyklisch, M_i endlich-stetig, $V = \bigoplus_{i \in I} V_i \subsetneq M$, $V_i \cong M_i$. Offenbar ist $\bigoplus_{i \in I} \bar{V}_i$ lokal-direkter Summand in M . Mit 5.23 ist $\bar{V}_i \cong M_i \cong V_i$, also $\bar{V}_i = V_i$. Mit 5.29 folgt die Behauptung. #

Daß rechts endlich-stetige, rechts kohärente Ringe weder regulär noch rechts stetig sein müssen, zeigen die Beispiele 6.5 und 6.6.

Kapitel 6

Rechts kohärente, rechts X_O -stetige Ringe und ihre Grothendieckgruppe

Wie wir in den vorangegangenen Kapiteln gesehen haben, besitzen diese Ringe die Austauscheigenschaft und endlich erzeugte, projektive Moduln ziehen n -te Wurzeln. Diese Eigenschaften werden unter anderem genutzt um Eigenschaften der Grothendieckgruppe solcher Ringe darzustellen.

Sei für einen Ring R $X(R)$ die Klasse aller endlich erzeugten, projektiven R -Rechtsmoduln. Zwei Moduln A und B aus $X(R)$ heißen stabil isomorph, wenn $A \oplus nR_R \cong B \oplus nR_R$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Stabil isomorph definiert eine Äquivalenzrelation auf $X(R)$. Mit $[A]$ sei die Äquivalenzklasse von $A \in X(R)$ bezeichnet. Durch $[A] + [B] := [A \oplus B]$ wird eine abelsche Halbgruppenstruktur auf der Menge S der Äquivalenzklassen definiert, die sich auf bekannte Weise zu einer abelschen Gruppenstruktur fortsetzen läßt. Die entstehende abelsche Gruppe heißt die Grothendieckgruppe $K_O(R)$.

Wir brauchen die folgenden bekannten Definitionen:

6.1 Definitionen

- a) Eine abelsche Gruppe G heißt partiell geordnet, wenn auf G eine partielle Ordnung existiert, die translationsinvariant ist.
- b) Eine partiell geordnete Gruppe G heißt unperforiert, wenn für ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $x \in G$ mit $nx \geq 0$ folgt, daß $x \geq 0$ gilt.
- c) Eine partiell geordnete Gruppe G heißt Interpolationsgruppe, wenn zu Elementen x_1, x_2, y_1, y_2 von G mit $x_1, x_2 \leq y_1, y_2$ ein $c \in G$ existiert, so daß $x_1, x_2 \leq c \leq y_1, y_2$.

6.2 Lemma

Sei R ein rechts kohärenter, rechts X_O -stetiger Ring. Dann wird für Moduln A, B, C, D aus $X(R)$, $[A] - [B], [C] - [D] \in K_O(R)$, durch

$[A] - [B] \leq [C] - [D] \Leftrightarrow A \oplus D \oplus nR_R \overset{\oplus}{\subset} C \oplus B \oplus nR_R$ für ein $n \in \mathbb{N}$, $K_O(R)$ zu einer partiell geordneten abelschen Gruppe.

Beweis

Die Reflexivität ist klar.

Transitivität: Seien $A, B, C, D, E, F \in X(R)$ mit $[A] - [B] \leq [C] - [D] \leq [E] - [F]$, also $A \oplus D \oplus nR_R \xrightarrow{\oplus} C \oplus B \oplus nR_R$, $C \oplus F \oplus mR_R \xrightarrow{\oplus} E \oplus D \oplus mR_R$, $n, m \in \mathbb{N}$, o.E $n = m$. Somit gilt $(A \oplus F) \oplus (D \oplus nR_R) \xrightarrow{\oplus} C \oplus B \oplus F \oplus nR_R \xrightarrow{\oplus} (E \oplus B) \oplus (D \oplus nR_R)$ und da D endlich erzeugt projektiv ist $A \oplus F \oplus kR_R \xrightarrow{\oplus} E \oplus B \oplus kR_R$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dies bedeutet $[A] - [B] \leq [E] - [F]$.

Symmetrie: Sei $[A] - [B] \leq [C] - [D] \leq [A] - [B]$, d.h. $A \oplus D \oplus nR_R \xrightarrow{\oplus} C \oplus B \oplus nR_R$, $C \oplus B \oplus mR_R \xrightarrow{\oplus} A \oplus D \oplus mR_R$, $n, m \in \mathbb{N}$, o.E $n = m$. Mit 5.6 folgt $C \oplus B \oplus mR_R \cong A \oplus D \oplus mR_R$, also $[A] - [B] = [C] - [D]$.

Translationsinvarianz: Sei $[A] - [B] \leq [C] - [D]$, also $A \oplus D \oplus nR_R \xrightarrow{\oplus} C \oplus B \oplus nR_R$. Dann gilt für $E, F \in X(R)$ $A \oplus D \oplus E \oplus F \oplus nR_R \xrightarrow{\oplus} C \oplus B \oplus E \oplus F \oplus nR_R$, also $[A \oplus E] - [B \oplus F] \leq [C \oplus E] - [D \oplus F]$, d.h.

$$([A] - [B]) + ([E] - [F]) \leq ([C] - [D]) + ([E] - [F]).$$

#

6.3 Lemma

Sei R ein rechts χ_o -stetiger, rechts kohärenter Ring. Dann gilt:

- Ist $A, B \in X(R)$ und $A \oplus nR_R \xrightarrow{\oplus} B \oplus nR_R$ ($n \in \mathbb{N}$), so ist $A \oplus R_R \xrightarrow{\oplus} B \oplus R_R$.
- Zu $A, B \in X(R)$ mit $[A] \leq [B]$ existiert ein $A' \xrightarrow{\oplus} A$, so daß $[A'] = [A]$, und $A' \xrightarrow{\oplus} B$.

Beweis

- gilt wegen 5.6 und 5.5, b) folgt aus a) und 3.3.

#

6.4 Satz

Sei R ein rechts χ_o -stetiger, rechts kohärenter Ring. Dann ist $K_o(R)$ eine partiell geordnete, unperforierte Interpolationsgruppe.

Beweis

Sei $A, B \in X(R)$, $[A] - [B] \in K_o(R)$, $n[A] - n[B] \geq 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Es gilt somit $nB \oplus R_R \xrightarrow{\oplus} nA \oplus R_R$, also auch $n(B \oplus R_R) \xrightarrow{\oplus} n(A \oplus R_R)$. Wegen 5.21 ist $B \oplus R_R \xrightarrow{\oplus} A \oplus R_R$, d.h. $[A] \geq [B]$, $[A] - [B] \geq 0$. Damit ist die Unperforiertheit von $K_o(R)$ gezeigt.

Um zu beweisen, daß $K_o(R)$ eine Interpolationsgruppe ist, genügt es, mit ([6], Prop.I.1.4) zu zeigen, daß zu

$x_1, y_1, \dots, y_k \in K_o(R)$, $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq x \leq y_1 + \dots + y_k$, Elemente $x_1, \dots, x_k$ aus $K_o(R)$ existieren mit $x = x_1 + \dots + x_k$, $x_j \leq y_j$ für $j = 1, \dots, k$. Seien $A, B_j \in X(R)$,

$x = [A], y_j = [B_j], j = 1, \dots, k$. Es gilt $[A] \leq [\bigoplus_{j=1}^k B_j]$, also o.E. $A \subseteq \bigoplus_{j=1}^k B_j$. Aufgrund der endlichen Austauschigkeit von A gibt es für $j = 1, \dots, k$ $A_j \subseteq \bigoplus_{j=1}^k B_j$ mit $A \cong \bigoplus_{j=1}^k A_j$. Für $x_j := [A_j]$ gilt die Behauptung. $\square$

6.5 Beispiel

Es gibt einen kommutativen, kohärenten, direkt finiten, χ_0 -stetigen Ring R , der nicht ZP-Ring und nicht injektiv ist.

Beweis

Sei für eine Menge I mit überabzählbarer Mächtigkeit S der Produktring über $|I|$ Kopien von $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und R der Unterring, bestehend aus allen Elementen von S , die bis auf abzählbar viele Komponenten konstant sind.

Sei A ein χ_0 -wesentlich erzeugtes Ideal in R . Es gibt also für $j \in \mathbb{N}$ Elemente $(y_i^j)_{i \in I}$ von A , so daß ihre Summe groß in A ist. Sei L eine abzählbare Teilmenge von I , so daß für $j \in \mathbb{N}$ y_i^j konstant ist für alle $i \in I \setminus L$. Wir definieren ein Element $x \in R$ durch $x_i = \bar{0}$, falls $y_i^j = \bar{0}$ für alle $j \in \mathbb{N}$, $x_i = \bar{1}$ sonst. Klar ist x_i konstant für $i \in I \setminus L$, d.h. $x \in R$. Zudem ist A in xR enthalten, denn ist für ein $i \in I$ $y_i^j = \bar{0}$ für alle $j \in \mathbb{N}$, so ist, weil $\sum_{j \in \mathbb{N}} (y_i^j)_{i \in I} R \subseteq A$ auch $a_i = \bar{0}$ für alle $a \in A$. Offenbar ist $\sum_{j \in \mathbb{N}} (y_i^j)_{i \in I} R \subseteq xR$, also $A \subseteq xR$ sowie $xR \subseteq R_R$. R_R hat also die χ_0 -Erweiterungseigenschaft.

Sei $x, y \in R$, $yR \cong xR \subseteq R_R$, o.E. $y^0 = x^0$. Weil xR direkter Summand ist, müssen die von Null verschiedenen Komponenten von x und damit auch jene von y bereits invertierbar in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sein. Es ist also $xR = yR$.

Wir zeigen nun, daß R kohärent ist: Seien A, B zwei endlich erzeugte Ideale von R . Für $A = \langle a^1, \dots, a^n \rangle$ definieren wir $a \in R$ durch $a_i = \bar{0}$, falls $a_i^j = \bar{0}$ für alle $j = 1, \dots, n$, $a_i = \bar{2}$, falls kein a_i^j invertierbar, jedoch eines verschieden von Null, $a_i = \bar{1}$, falls ein a_i^j invertierbar. Klar ist $\sum_{j=1}^n a_i^j R = aR$. Analog folgt, daß B zyklisch ist. Offenbar ist der Schnitt zweier zyklischer Ideale wieder zyklisch. Weil auch der Annulator eines Elementes von R zyklisch ist, folgt aus ([2], Th.2.2), daß R kohärent ist.

Da $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ kein ZP-Ring ist, gilt dies auch für R .

Es bleibt R nicht injektiv zu zeigen. Sei $I = L_1 \cup L_2$, $|L_1|, |L_2| > \chi_0$ und für $j \in L_1$ $e^j \in R$ durch $e_i^j = \bar{1}$, $e_i^j = \bar{0}$ sonst, definiert. Für ein $x = x^2 \in R$ mit $\sum_{j \in L_1} e^j R \subseteq xR$ müßte $x_i = \bar{1}$ für $i \in L_1$, $x_i = \bar{0}$ für $i \in L_2$ gelten. Dies ist nicht möglich. $\square$

6.6 Beispiel

Es gibt einen unzerlegbaren, rechts kohärenten, rechts $\mathcal{X}_0$ -stetigen Ring R , der nicht regulär, nicht injektiv, nicht direkt finit ist und für den $R_R \oplus R_R \not\cong R_R$ gilt.

Beweis

Sei I eine überabzählbare Menge, S der Quasifrobeniusring $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und für $i \in I$ $V_i \cong S_S$, $V := \bigoplus_{i \in I} V_i$. Für eine Teilmenge I' von I sei $\bigoplus_{i \in I'} V_i$ durch $V(I')$ bezeichnet. Bekannterweise ist V ein injektiver S -Modul und für einen Untermodul U von V gibt es eine Teilmenge I' von I , so daß für die injektive Hülle $\bar{U}$ von U in V $\bar{U} \oplus V(I') = V$ gilt. Somit ist $\bar{U} \cong V(I \setminus I')$.

Wir definieren $\dim(U) := |I \setminus I'|$, $\text{codim}(U) := |I'|$. $\dim(U)$ und $\text{codim}(U)$ sind wegen Krull-Remak-Schmidt eindeutig bestimmt.

Wir zeigen, daß für einen $\mathcal{X}_0$ -wesentlich erzeugten Untermodul U von V seine Dimension höchstens $\mathcal{X}_0$ ist:

Sei $U' \subseteq U$, U' $\mathcal{X}_0$ -erzeugt. U' und damit $\text{So}(U')$ haben dann nur abzählbar viele Elemente. Es ist $\text{So}(U') = \text{So}(U) \cong (2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{(J)}$ für ein $J \subset I$, $|J| \leq \mathcal{X}_0$, d.h. $\bar{U} \cong \overline{\text{So}(\bar{U})} \cong (S_S)^{(J)}$.

Schließlich sei bemerkt, daß für eine Teilmenge J von I und Elemente $w_i \in V$ für $v_j S = V_j$ immer ein Epimorphismus f von $V(J)$ auf $\sum_{i \in J} w_i R$ mit $f(v_j) = w_j$ existiert. Wir definieren nun den Ring R als Unterring von $E := \text{End}(V_S)$:

Sei $R := \{r \in E \mid \exists I' \subset I: r(V(I')) = k \text{ id für ein } k \in S, |I \setminus I'| \leq \mathcal{X}_0\}$. Man rechnet ohne Mühe nach, daß R ein Unterring von E mit $1 \in R$ ist.

Wir beweisen, daß R ein rechts kohärenter Ring ist:

Hierfür reicht es, wegen ([2], Th. 2.2) zu zeigen, daß der Schnitt zweier endlich erzeugter Rechtsideale von R endlich erzeugt ist, sowie der Rechtsannullator eines Elementes von R endlich erzeugt ist.

Wir zeigen zunächst, daß für ein $f \in R$ fR aus den Elementen von R besteht, deren Bilder in $f(V)$ enthalten sind:

Sei $g \in R$ mit $g(V) \subset f(V)$. Es existieren $I_1, J_1 \subset I$, $k, h \in S$, so daß $f|_{V(I_1)} = k \text{ id}$, $g|_{V(J_1)} = h \text{ id}$, $|I \setminus I_1| \leq \mathcal{X}_0$, $|I \setminus J_1| \leq \mathcal{X}_0$. O.E. kann $I_1 = J_1$ und da $g(V(I \setminus I_1))$ und $f(V(I \setminus I_1))$ nur abzählbar viele Elemente enthalten auch $g(V(I \setminus I_1)) \subset V(I \setminus I_1)$ und $f(V(I \setminus I_1)) \subset V(I \setminus I_1)$ angenommen werden. Wir wählen für $i \in I_1$, $v_i S = V_i$, $v_i \in V_i$, ein $s \in S$ mit $f(sv_i) = g(v_i)$ und für $i \in I \setminus I_1$ ein Element x_i aus $f^{-1}\{g(v_i)\}$. Durch $p|_{V(I_1)} = \text{id}$, $p(v_i) = x_i$ für $i \in I \setminus I_1$ wird ein Homomorphismus p aus R definiert, für den offenbar $fp = g$ gilt.

Seien endlich erzeugte Rechtsideale F und G von R gegeben, F von $f_1, \dots, f_n$ und G von $g_1, \dots, g_n$ erzeugt. Seien $I_1, \dots, I_n, J_1, \dots, J_n \subset I$, $k_1, \dots, k_n, h_1, \dots, h_n \in S$, so daß $f_j|V(I_j) = k_j \text{id}$, $g_j|V(J_j) = h_j \text{id}$, $|I \setminus I_j| \leq \chi_0$, $|I \setminus J_j| \leq \chi_0$. Wir können o.E. $J_0 := I_1 = \dots = I_n = J_1 = \dots = J_n$, $|I \setminus J_0| = \chi_0$ annehmen.

Wir zeigen nun, daß ein Element $f_0 \in R$ existiert mit $f_0(V) = \sum_{j=1}^n f_j(V)$:

$\sum_{j=1}^n f_j(V(I \setminus J_0))$ hat abzählbar viele Elemente. Somit existiert ein Epimorphismus f' von $V(I \setminus J_0)$ auf $\sum_{j=1}^n f_j(V(I \setminus J_0))$. Für $k_0 := \bar{0}$ falls alle $k_j = \bar{0}$, $k_0 := \bar{1}$ bzw. $\bar{3}$, falls ein $k_j = \bar{1}$ bzw. $\bar{3}$, $k_0 := \bar{2}$ sonst, wird durch $f_0|V(J_0) = k_0 \text{id}$, $f_0|V(I \setminus J_0) = f'$ ein Element f_0 aus R mit $f_0(V) = \sum_{j=1}^n f_j(V)$ definiert.

Wir behaupten, daß $f_0 R = \sum_{j=1}^n f_j R$ ist:

Weil $f_j(V) \subset f_0(V)$ ist, folgt aus den obigen Überlegungen, daß $f_j \in f_0 R$ für $j = 1, \dots, n$.

Es ist für $i \in J_0$ $f_0(v_i) = k_0 \text{id}$, also nach Konstruktion $f_0(v_i) = f_{j_0}(v_i)$ für ein $j_0 \in \{1, \dots, n\}$. Sei o.E. $j_0 = 1$. Für $i \in I \setminus J_0$ ist $f_0(v_i) = \sum_{j=1}^n b_{ij}$ mit $b_{ij} \in f_j(V)$. Wir definieren $t_1 \in R$ durch $t_1(v_i) = f_1(v_i)$ für $i \in J_0$, $t_1(v_i) = b_{i1}$ für $i \in I \setminus J_0$ und für $j = 2, \dots, n$ $t_j \in R$ durch $t_j|V(J_0) = \bar{0}$, $t_j(v_i) = b_{ij}$ für $i \in I \setminus J_0$. Dann gilt offenbar $\sum_{j=1}^n t_j = f_0$ und $t_j(V) \subset f_j(V)$, d.h. $t_j \in f_j R$. Somit ist $f_0 R = \sum_{j=1}^n f_j R$.

Analog existiert ein $g_0 \in R$ mit $\sum_{j=1}^n g_j R = g_0 R$.

Wir zeigen, daß für $f, g \in R$ $fR \cap gR$ zyklisch ist:

Sei $J \subset I$, $k, h \in S$, so daß $f|V(J) = k \text{id}$, $g|V(J) = h \text{id}$, $|I \setminus J| = \chi_0$, $f(V(I \setminus J)) \subset V(I \setminus J)$, $g(V(I \setminus J)) \subset V(I \setminus J)$. Es existiert ein Epimorphismus p' von $V(I \setminus J)$ auf den Schnitt $f(V(I \setminus J)) \cap g(V(I \setminus J))$. Für $k_0 := \bar{0}$ falls $k = \bar{0}$ oder $h = \bar{0}$, $k_0 := \bar{1}$ falls k und h invertierbar, $k_0 := \bar{2}$ sonst wird durch $p(V(J)) = k_0 \text{id}$, $p|V(I \setminus J) = p'$ ein Element p aus R mit $p(V) = f(V) \cap g(V)$ definiert. Weil für alle $t \in fR \cap gR$ $t(V) \subset f(V) \cap g(V)$ gilt, ist $fR \cap gR \subset pR$. Ist $pr \in pR$, so ist $pr(V) \subset f(V) \cap g(V)$, also $pr \in fR \cap gR$. Somit ist gezeigt, daß der Schnitt endlich erzeugter Rechtsideale von R endlich erzeugt ist.

Für die Rechtskohärenz von R bleibt die endliche Erzeugtheit des Rechtsannullators eines Elementes $f \in R$ zu beweisen:

Sei $f \in R$, $J \subset I$, $k \in S$, so daß $f|V(J) = k \text{id}$, $|I \setminus J| = \chi_0$, $f(V(I \setminus J)) \subset V(I \setminus J)$, $L := \text{Ker}(f|V(I \setminus J))$. Es existiert ein Epimorphismus p' von $V(I \setminus J)$ auf L . Wir definieren $p \in R$ durch $p|V(J) = (\overline{4 - \text{ord}(k)}) \text{id}$, $p|V(I \setminus J) = p'$. Dann ist $p(V) = \text{Ker}(f)$ und somit $f p R = 0$. Ist $ft = 0$ für ein $t \in R$, so ist $t(V) \subset \text{Ker}(f)$, also $t \in pR$. Die Rechtskohärenz von R ist bewiesen.

Als nächstes zeigen wir, daß für Rechtsideale F und G von R mit $F \subseteq G$

$B' := \sum_{f \in F} f(V) \subseteq \sum_{g \in G} g(V) =: B$ gilt: Angenommen, es gibt ein $\bar{0} \neq y \in B$ mit $yS \cap B' = \bar{0}$.

Dann ist $y = \sum_{j=1}^m g_j(w_j)$ für Elemente $g_1, \dots, g_m \in G$, $w_1, \dots, w_m \in V$. Seien für $j = 1, \dots, m$ Elemente $t_j \in R$ durch $t_j(v_i) = w_j$, $t_j|_{V(I \setminus \{i\})} = \bar{0}$ definiert. Dann gilt für $g_0 := \sum_{j=1}^m g_j t_j$, $g_0(V) = yS$, d.h. $g_0 R \cap F = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Wir beweisen die χ_0 -Erweiterungseigenschaft von R_R :

Seien $F \subseteq G \subseteq R_R$, $F = \langle f_1, f_2, \dots \rangle$, B und B' wie oben und $\bar{B} \oplus V(J') = V$ für ein $J' \subset I$. Dann ist entweder $\dim(\bar{B}) \leq \chi_0$ oder $\text{codim}(\bar{B}) \leq \chi_0$, denn ist $\dim(f_n(V)) \leq \chi_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist offenbar $\dim(B') = \dim(\bar{B}) \leq \chi_0$, und ist $\dim(f_j(V)) > \chi_0$ für ein $j \in \mathbb{N}$, so ist $\text{codim}(\overline{f_j(V)}) = \text{codim}(f_j(V)) \leq \chi_0$, also $\text{codim}(\bar{B}) \leq \chi_0$.

Sei $e \in R$ durch $e|_{\bar{B}} = \text{id}$, $e|_{V(J')} = \bar{0}$ definiert. Weil für $g \in G$ $g = eg \in eR$ ist, folgt $G \subseteq eR$. Sei $0 \neq er \in eR$. Es existieren $x, y \in V$ mit $er(x) = y \neq \bar{0}$. O.E. kann $yS \cong 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und weil $B' \subseteq \bar{B}$ gilt $y \in B'$ angenommen werden. Sei $y = \sum_{i=1}^k f_i(x_i)$ für ein $k \in \mathbb{N}$ und Elemente x_i aus V . Sei $v \in V$ mit $vS \cong S_5$ und für $i = 1, \dots, k$ $r_i \in R$ mit $r_i(v) = x_i$. Für $f_0 := \sum_{i=1}^k f_i r_i$ gilt offenbar $f_0(v) = y$. Für $\overline{xS} = x'S$ für ein $x' \in V$, $\overline{xS} \oplus V(J_x) = V$ für ein $J_x \subset I$ definieren wir $r_1, r_2 \in R$ durch $r_1(x') = x$, $r_1|_{V(J_x)} = \bar{0}$, $r_2(x') = v$, $r_2|_{V(J_x)} = \bar{0}$. Es ist $0 \neq err_1 = f_0 r_2$. Somit ist $G \subseteq eR$ bewiesen.

Wir zeigen die χ_0 -Quasistetigkeit von R_R :

Sei $e^2 = e \in R$, $f^2 = f \in R$, $eR \cap fR = 0$, $e(V) \oplus V(J_1) = V$, $f(V) \oplus V(J_2) = V$, $\dim(e(V)) \leq \chi_0$ oder $\dim(V(J_1)) \leq \chi_0$, $\dim(f(V)) \leq \chi_0$ oder $\dim(V(J_2)) \leq \chi_0$. Seien $e_1 \in R$ durch $e_1|_{e(V)} = \text{id}$, $e_1|_{V(J_1)} = \bar{0}$, $f_1 \in R$ durch $f_1|_{f(V)} = \text{id}$, $f_1|_{V(J_2)} = \bar{0}$, definiert. Es ist $eR = e_1 R$ und $f_1 R = fR$, und da $eR \cap fR = 0$ gilt, $e(V) \cap f(V) = \bar{0}$. Sei für $J_3 \subset I$ und $e(V) \oplus f(V) \oplus V(J_3) = V$ $t \in R$ durch $t|(e(V) \oplus f(V)) = \text{id}$, $t|_{V(J_3)} = \bar{0}$ definiert. Wir sehen, daß $tR = eR \oplus fR$ direkter Summand in R_R ist. Um die χ_0 -Stetigkeit von R_R zu zeigen, reicht es, wegen 5.30 für $r \in R$, $rR \subseteq R_R$, $rR \cong R_R$ die Gleichheit von R und rR zu beweisen: Sei o.E. der Rechtsannulator von r Null. Dann ist r ein Monomorphismus. Wie bereits gezeigt, ist $r(V) \subseteq V$. Da V injektiv ist, also $r(V) = V$ gilt, ist r invertierbar d.h. $rR = R$.

R ist nicht rechts injektiv:

Für $I = L_1 \dot{\cup} L_2$, $|L_1| > \chi_0$, $|L_2| > \chi_0$, definieren wir für $j \in L_1$ $g_j \in R$ durch $g_j|_{V_j} = \text{id}$, $g_j|_{V(I \setminus \{j\})} = \bar{0}$. Wäre $\langle g_j : j \in L_1 \rangle \subseteq eR$ für ein $e = e^2 \in R$, so müßte $V(L_1) \subseteq e(V)$, also $V(L_1) = e(V)$ sein. Dies ist ein Widerspruch.

$R_R \oplus R_R \not\cong R_R$:

Sei $R_R = xR \oplus yR$, $0 \neq xR \cong yR \cong R_R$, o.E. $x^0 = y^0 = 0$. x und y sind Monomorphismen. Es existiert also ein $j \in I$ sowie $r_1, r_2 \in R$ mit $xr_1|_{V_j} = yr_2|_{V_j} = \text{id}$. Der Schnitt von xR und yR ist dann nicht Null im Widerspruch zur Annahme.

Es existiert ein $0 \neq x \in R$ mit $xR \oplus xR \cong xR$:

Sei J eine nicht endliche, abzählbare Teilmenge von I , $J = J_1 \dot{\cup} J_2$, $|J_1| = \aleph_0$, $|J_2| = \aleph_0$. Offenbar existieren Isomorphismen f_1 von $V(J)$ auf $V(J_1)$ und f_2 von $V(J)$ auf $V(J_2)$. Seien $x, x_1, x_2 \in R$ durch $x|_{V(I \setminus J)} = \bar{0}$, $x|_{V(J)} = \text{id}$, $x_1|_{V(I \setminus J)} = \bar{0}$, $x_1|_{V(J)} = f_1$ und $x_2|_{V(I \setminus J)} = \bar{0}$, $x_2|_{V(J)} = f_2$ definiert. Hierfür gilt $xR = x_1R \oplus x_2R$, $0 \neq x_1R \cong x_2R \cong xR$.

Klar ist R unzerlegbar.

■

Kapitel 7

Die F-Injektive Hülle von Moduln über einem rechts kohärenten Ring

Sei für einen rechts kohärenten Ring R die Menge aller χ_0 -wesentlich erzeugten, großen Rechtsideale von R durch F bezeichnet.

7.1 Lemma

Ist R ein rechts kohärenter Ring, so gilt:

Für $I \in F$, $a \in R$ ist auch $(I:a) := \{r \in R \mid ar \in I\} \in F$.

Beweis

Sei $I \in F$, $a \in R$. Es existiert $J \subset R_R$, J χ_0 -erzeugt, $J \not\subset I$. Wegen $J \not\subset R$ gilt $(J:a) \not\subset R$. $aR \cap J$ ist χ_0 -erzeugt und a° endlich erzeugt, da aR endlich präsentiert ist. Somit ist $(J:a)$ χ_0 -erzeugt. Wegen $(J:a) \subset (I:a)$ ist $(I:a) \in F$. #

Wir definieren nun die F -injektive Hülle eines Moduln über einem rechts kohärenten Ring. Für Moduln über regulären Ringen hat dies Kutami in [11] getan. Es zeigt sich jedoch, daß die Definition bereits über rechts kohärenten Ringen einen Sinn ergibt.

7.2 Definition und Lemma

Sei M ein Modul über einem rechts kohärenten Ring und $M \subset E(M)$ eine injektive Hülle von M .

Dann ist $E_F(M) := \{x \in E(M) \mid (M:x) \in F\}$ ein Untermodul von $E(M)$ und heißt F -injektive Hülle von M .

Beweis

Wegen 4.16 ist für $x, y \in E_F(M)$ $(M:x) \cap (M:y) \in F$, und da $(M:x) \cap (M:y) \subset (M:(x+y))$ auch $(M:(x+y)) \in F$. Sei nun $r \in R$. Mit 7.1 ist $(M:xr) = ((M:x):r) \in F$. #

Das folgende Lemma findet sich für reguläre Ringe in [11].

7.3 Lemma

Sei R ein rechts kohärenter Ring und M ein R -Modul. Dann gilt:

- Ist $M = A \oplus B$, $E(M) = E(A) \oplus E(B)$, so ist $E_F(M) = E_F(A) \oplus E_F(B)$.
- Jeder R -Homomorphismus von M in einen R -Modul N kann zu einem R -Homo-

morphismus von $E_F(M)$ nach $E_F(N)$ fortgesetzt werden.

- c) Ist $M \cong N$ für einen R -Modul N , so auch $E_F(M) \cong E_F(N)$.

Beweis

- a) Sei $m \in E_F(M)$, $m = a + b$, $a \in E(A)$, $b \in E(B)$. Es ist $(M:m) = (A:a) \cap (B:b)$ Element von F , also $(A:a) \in F$, $(B:b) \in F$, d.h. $a \in E_F(A)$, $b \in E_F(B)$. Ist $a \in E_F(A)$, $b \in E_F(B)$, so auch $a + b \in E_F(M)$.
- b) Sei $f: M \longrightarrow N$ ein Homomorphismus. f kann zu einem Homomorphismus $\bar{f}: E(M) \longrightarrow E(N)$ fortgesetzt werden. Sei $m \in E_F(M)$. Weil $(M:m) \subset (N:\bar{f}(m)) \in F$ gilt, ist das Bild der Einschränkung von $\bar{f}$ auf $E_F(M)$ in $E_F(N)$ enthalten, d.h. $\bar{f}|_{E_F(M)}$ ist die gewünschte Fortsetzung.
- c) folgt aus b), da $\bar{f}(E_F(M)) = E_F(N)$.

■

7.4 Lemma

Sei R ein rechts kohärenter Ring, M ein nichtsingulärer R -Modul.

Dann gilt:

- a) Ist $E_0 \in \mathcal{X}_O(E_F(M))$, so ist $(E_0 \cap M) \in \mathcal{X}_O(M)$.
- Ist zusätzlich M $\mathcal{X}_O$ -quasistetig so gilt:
- b) Ist $E_0 \in \mathcal{X}_O(E_F(M))$, $E_0 \subseteq E_F(M)$, so ist $(E_0 \cap M) \subseteq M$ und $E_F(E_0 \cap M) = E_0$.
- c) Ist $E_1 \oplus E_2 \subseteq E_F(M)$, $E_1 \cong E_2 \in \mathcal{X}_O(E_F(M))$, so ist $(E_1 \cap M) \oplus (E_2 \cap M) \subseteq M$ und $(E_1 \cap M) \cong (E_2 \cap M)$.
- d) Ist $E_F(M) = \bigoplus_{j \in J} E_j$, $E_j \in \mathcal{X}_O(E_F(M))$, so ist $M = \bigoplus_{j \in J} (M \cap E_j)$.

Beweis

- a) Sei $\langle h_1, h_2, \dots \rangle \subseteq E_0$, $h_i \in E_0$. Es reicht, zu zeigen, daß $H_n := \langle h_1, \dots, h_n \rangle \cap M$ $\mathcal{X}_O$ -wesentlich erzeugt ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $J_1 \subseteq (M:h_1)$, J_1 $\mathcal{X}_O$ -erzeugt. Es ist $J_n := \bigcap_{i=1}^n J_i$ $\mathcal{X}_O$ -erzeugt, also $V_n := \{ \sum_{i=1}^n h_i r_i \mid r_i \in J_n \}$ $\mathcal{X}_O$ -erzeugt. Wir behaupten, daß $V_n \subseteq H_n$ ist:
- Sei $0 \neq \sum_{i=1}^n h_i t_i \in H_n$. $I_1 := (J_n : t_1)$ ist wegen 7.1 Element von F , also auch $I := \bigcap_{i=1}^n I_i \in F$. Da M nichtsingulär ist, gibt es ein $h \in I$ mit $0 \neq \sum_{i=1}^n h_i t_i h$. Dabei ist $t_i h \in J_n$, also $\sum_{i=1}^n h_i t_i h \in V_n$.
- b) Sei $E_0 \subseteq E_F(M)$, $E_0 \in \mathcal{X}_O(E_F(M))$, $E_0 \oplus T := E_F(M)$. $(E_0 \cap M)$ ist wegen a) $\mathcal{X}_O$ -wesentlich erzeugt. Sei $(E_0 \cap M) \subseteq \overline{(E_0 \cap M)} \subseteq M$. Weil als große Erweiterung von M auch $E_F(M)$ nichtsingulär ist, gilt wegen 4.9, daß $\overline{(E_0 \cap M)} \subset E_0$, also $\overline{(E_0 \cap M)} = E_0 \cap M$ ist.
- Sei $x \in E_0$. Dann ist, weil $(M:x) = ((E_0 \cap M):x)$ gilt, $x \in E_F(E_0 \cap M)$.

Ist $x \in E(E_0) = E(E_0 \cap M) \oplus E(M)$ mit $x_l \in (E_0 \cap M)$ für ein $l \in F$, so gilt $x \in E_F(M)$, also $x = x_0 + t$, $x_0 \in E_0$, $t \in T$. Weil $(x - x_0) = t$ und $E(E_0) \cap T = 0$ gilt, ist $t = 0$, $x = x_0$ und somit $x \in E_0$.

- c) Sei $E_1 \oplus E_2 \subseteq E_F(M)$, $E_1 \cong E_2 \in \chi_O(E_F(M))$. Wegen b) und da M χ_O -quasistetig ist, ist $(E_1 \cap M) \oplus (E_2 \cap M) \subseteq M$.

Für einen Isomorphismus $f: E_1 \longrightarrow E_2$ gilt mit a), daß $f^{-1}(E_2 \cap M)$ χ_O -wesentlich erzeugt und auch $f^{-1}(E_2 \cap M) \cap (E_1 \cap M)$ χ_O -wesentlich erzeugt ist. Offensichtlich ist $f(f^{-1}(E_2 \cap M) \cap (E_1 \cap M)) \cong f^{-1}(E_2 \cap M) \cap (E_1 \cap M)$ und $f(f^{-1}(E_2 \cap M) \cap (E_1 \cap M)) \subseteq E_2 \cap M$, $f^{-1}(E_2 \cap M) \cap (E_1 \cap M) \subseteq E_1 \cap M$. Mit 0.7 folgt $E_1 \cap M \cong E_2 \cap M$.

- d) Sei $E_F(M) = \bigoplus_{j \in J} E_j$, $E_j \in \chi_O(E_F(M))$, $x \in M$, $x \in E_{j_1} \oplus \dots \oplus E_{j_n}$, $j_i \in J$. Weil $\bigoplus_{i=1}^n (M \cap E_{j_i}) \subseteq M \cap \bigoplus_{i=1}^n E_{j_i} \subseteq M$, aber auch $\bigoplus_{i=1}^n (M \cap E_{j_i}) \subseteq M$ gilt, folgt $\bigoplus_{i=1}^n (M \cap E_{j_i}) = M \cap \bigoplus_{i=1}^n E_{j_i}$, d.h. $M = \bigoplus_{j \in J} (M \cap E_j)$. #

Satz 7.5 wird in ([11], Prop. 7) für nichtsinguläre, χ_O -quasistetige Moduln über einem regulären Ring gezeigt.

7.5 Satz

Sei R ein rechts kohärenter Ring. Ist M ein nichtsingulärer, χ_O -quasistetiger R -Modul, so auch $E_F(M)$.

Beweis

Sei $A \in \chi_O(E_F(M))$. $A \cap M$ ist wegen 7.4 a) χ_O -wesentlich erzeugt. Sei $A \cap M \subseteq \overline{A \cap M} \subseteq M$. Wegen 7.3 ist $E_F(\overline{A \cap M}) \subseteq E_F(M)$, und da $E_F(M)$ nichtsingulär ist, $A \subseteq E_F(\overline{A \cap M})$. $E_F(M)$ hat also die χ_O -Erweiterungseigenschaft. Um $E_F(M)$ χ_O -quasistetig zu zeigen, reicht es, wegen 0.4 für $A \in \chi_O(E_F(M))$, $B \subseteq E_F(M)$, $A \cap B = 0$, Homomorphismen von A nach B zu Homomorphismen von $E_F(M)$ nach B hochzuheben.

Sei $f: A \longrightarrow B$ ein Homomorphismus, $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n R \subseteq A$, $x_n |_{n'} \subseteq M$, $f(x_n) |_{n''} \subseteq M$ für Elemente $x_n \in A$ und $|_{n'}$, $|_{n''} \subseteq R_R$, $|_{n'}$, $|_{n''}$ χ_O -erzeugt. Es ist $|_{n'} := |_{n'} \cap |_{n''} \subseteq R_R$, $|_{n'}$ χ_O -erzeugt, $C := \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n |_{n'}$ χ_O -erzeugt, $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(x_n) |_{n''}$ χ_O -erzeugt, $C \subseteq A$, und wegen 4.3 $f(C) \subseteq f(A)$. $f|_C$ läßt sich zu einem Endomorphismus von M hochheben. Dieser wiederum läßt sich wegen 7.3 zu einem Endomorphismus $\bar{f}$ von $E_F(M)$ hochheben. Da $\bar{f}$ auf einem großen Untermodul von A mit f übereinstimmt, ist $\bar{f}$ mit 4.3 eine Fortsetzung von f . #

Die folgende Aussage beweist Kutami in Theorem 8 in [11] für nichtsinguläre, χ_0 -stetige Moduln über regulären Ringen. Die Abschwächung der Voraussetzungen ist mit Hilfe von Lemma 2.2 und 7.4 möglich.

7.6 Satz

Sei R ein rechts kohärenter Ring, M ein nichtsingulärer, χ_0 -quasistetiger R -Modul.

Dann ist M genau dann direkt finit, wenn $E_F(M)$ direkt finit ist.

Beweis

Ist $E_F(M)$ nicht direkt finit, so existiert mit 2.2 eine unendliche direkte Summe $0 \neq \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} x_i R$ von paarweise isomorphen, zyklischen Untermoduln von $E_F(M)$. Sei $x_i R \subseteq E_i \subseteq E_F(M)$. Dann gilt $E_i \cong E_j$ für $i, j \in \mathbb{N}$ und 7.4 c) besagt, daß $(E_i \cap M) \cong (E_j \cap M)$ für $i, j \in \mathbb{N}$. Klar ist $0 \neq \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} (E_i \cap M) \subseteq M$. Wegen 2.2 ist M nicht direkt finit.

Ist M nicht direkt finit, so gibt es einen lokal-direkten Summanden $0 \neq L = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} L_i$ von M , wobei die L_i paarweise isomorph und zyklisch wesentlich erzeugt sind. Wegen 7.3 ist $0 \neq \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} E_F(L_i)$ lokal-direkter Summand in $E_F(M)$ mit $E_F(L_i) \cong E_F(L_j)$ für $i, j \in \mathbb{N}$. Aus 2.2 folgt die Behauptung. #

7.7 Beispiel

Es gibt einen Modul M über einem rechts kohärenten Ring, dessen F -injektive Hülle verschieden von der injektiven Hülle ist.

Beweis

Wir betrachten den Ring R aus Beispiel 6.5. Man rechnet ohne Mühe nach, daß $M := R_R \subseteq \left(\prod_{i \in I} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \right)_R =: E$ gilt, also eine injektive Hülle von R_R über E liegt. Sei $L_1, L_2 \subset I$ wie in 6.5 und $x \in E$ das Element, welches an der i -ten Stelle für $i \in L_1$ $\bar{1}$ und für $i \in L_2$ $\bar{0}$ stehen hat. Offenbar ist $(R_R : x)$ das Ideal all jener Elemente von R , deren Komponenten bis auf abzählbar viele Null sind. Wäre $(R_R : x)$ χ_0 -wesentlich erzeugt, gäbe es eine abzählbare Teilmenge J von I , so daß die Komponenten aller Elemente aus $(R_R : x)$ auf dem Komplement von J in I $\bar{0}$ sind. Dies jedoch ist nicht möglich. Damit ist $E_F(R_R) \subsetneq E(R_R)$.

Es sei bemerkt, daß in diesem Beispiel auch $R_R \subsetneq E_F(R_R)$ gilt, denn für $y \in E$ mit $y_i = \bar{1}$ für $i \in L_1$, $y_i = \bar{3}$ für $i \in L_2$ und $v \in R$ mit $v_i = \bar{2}$ für $i \in I$ ist $vR \subseteq (R_R : y)$. #

Kapitel 8

Reguläre, rechts χ_o -stetige Ringe und ihre Faktorringe

§1 Reguläre, rechts χ_o -stetige Ringe

8.1 Bezeichnung

Für einen regulären Ring werde durch Q sein maximaler Rechts-Quotientenring (vergleiche [4], chap. 2, C) und durch S sein maximaler Rechts- χ_o -Quotientenring (vergleiche [5], chap. 14) bezeichnet.

8.2 Lemma

Sei R ein regulärer Ring, S sein maximaler Rechts- χ_o -Quotientenring.

Dann ist für Idempotente $e_1, \dots, e_n$ aus R $\bigoplus_{i=1}^n (e_i S)_R$ eine F -injektive Hülle von $\bigoplus_{i=1}^n e_i R$.

Beweis

S_R ist, weil Q_R injektive Hülle von R_R ist, per Definitionem eine F -injektive Hülle von R_R . Sei e ein Idempotent in R , $s \in S$. Es existiert ein $J \in F$ mit $sJ \subset R$, also $esJ \subset eR$, d.h. $eR \subset (eS)_R \subset E_F(eR) \subset E(eR) = eQ$. Da $eS \oplus (1-e)S = S_R$, sowie $eR \subset E_F(eR)$, folgt $(eS)_R = E_F(eR)$. Mit 7.3 a) ergibt sich die Behauptung. $\#$

8.3 Lemma ([5], Th. 14.12)

Sei R ein regulärer, rechts χ_o -stetiger Ring. Dann ist sein maximaler Rechts- χ_o -Quotientenring S gleichfalls regulär, rechts χ_o -stetig, und Idempotente in S sind Idempotente in R . Zudem läßt sich jeder Homomorphismus eines χ_o -erzeugten Rechtsideals von S_S nach S_S zu einem Endomorphismus von S hochheben.

8.4 Lemma

Sei R ein regulärer, rechts χ_o -stetiger Ring. Dann ist sein maximaler Rechts- χ_o -Quotientenring S_S χ_o -injektiv und $(nS)_S$ χ_o -stetig für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis

Daß S_S χ_o -injektiv ist, folgt aus 4.3 und 8.3. Wegen 5.14 ist $(nS)_S$ χ_o -stetig für alle $n \in \mathbb{N}$. $\#$

8.5 Bemerkung

Im folgenden braucht wegen ([4], 2.7) für S-Moduln A und B, B nichtsingulär, nicht zwischen R und S-Homomorphismen unterschieden werden.

Für zwei Moduln A und B, die für einen quasistetigen Modul M direkter Summand in M sind gilt, daß ihre injektiven Hüllen genau dann isomorph sind, wenn A und B isomorph sind. Dies wurde in ([14], Cor. 5) bewiesen. Eine analoge Aussage läßt sich für endlich erzeugte, projektive Moduln über einem regulären, rechts χ_o -stetigen Ring formulieren.

8.6 Satz

Seien A und B endlich erzeugte, projektive Moduln über einem regulären, rechts χ_o -stetigen Ring R. Dann gilt:

$$A \cong \left(\bigoplus_{i=1}^n \right) B \Leftrightarrow E_F(A) \cong \left(\bigoplus_{i=1}^n \right) E_F(B).$$

Beweis

Sei $A \cong A_1 \oplus \dots \oplus A_n$, $A_i \subseteq R_R$, $B \cong B_1 \oplus \dots \oplus B_m$, $B_i \subseteq R_R$.

Sei zunächst $E_F(A) \cong E_F(B)$.

Wegen 8.2 und 7.3 gilt $E_F(A_i)_S \subseteq S_S$, $E_F(B_j)_S \subseteq S_S$, $\bigoplus_{i=1}^n E_F(A_i) \cong \bigoplus_{j=1}^m E_F(B_j)$, und da S regulär ist, existieren mit [5], 2.8) folgende Zerlegungen:

$$\begin{array}{ccc} E_F(A_1) & \stackrel{f_1}{\cong} & E_F(B_1)^1 \oplus \dots \oplus E_F(B_m)^1 \\ E_F(A_2) & \stackrel{f_2}{\cong} & E_F(B_1)^2 \oplus \dots \oplus E_F(B_m)^2 \\ \vdots & & \vdots \\ E_F(A_n) & \stackrel{f_n}{\cong} & E_F(B_1)^n \oplus \dots \oplus E_F(B_m)^n \\ & & \parallel \qquad \qquad \parallel \\ & & E_F(B_1) \qquad \qquad E_F(B_m) \end{array}$$

Wegen 7.4 gibt es Zerlegungen $B_1 = B_1^1 \oplus \dots \oplus B_1^n$, ..., $B_m = B_m^1 \oplus \dots \oplus B_m^n$ mit $E_F(B_j)^i = E_F(B_j^i)$ für $j = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, n$. Aufgrund von 7.4 ist $f_i(A_i) \cap \bigoplus_{j=1}^m B_j^i$ χ_o -wesentlich erzeugt und mit 4.16 auch $f_i(A_i) \cap B_j^i$ χ_o -wesentlich erzeugt. Man zeigt ohne Mühe, daß $\bigoplus_{j=1}^m (f_i(A_i) \cap B_j^i) \subseteq \bigoplus_{j=1}^m B_j^i$ und somit auch $\bigoplus_{j=1}^m f_i^{-1}(f_i(A_i) \cap B_j^i) \subseteq A_i$ gilt. Da die A_i χ_o -stetig sind, folgt $A_i = \bigoplus_{j=1}^m \overline{f_i^{-1}(f_i(A_i) \cap B_j^i)}$. Aus $A_i \subseteq R_R$, $B_j \subseteq R_R$, $f_i^{-1}(f_i(A_i) \cap B_j^i) \cong f_i(A_i) \cap B_j^i$ ergibt sich mit Satz 5.23, daß $\overline{f_i^{-1}(f_i(A_i) \cap B_j^i)} \cong \overline{f_i(A_i) \cap B_j^i} = B_j^i$, also

$$\begin{array}{ccc}
 A_1 \cong B_1^1 \oplus \dots \oplus B_m^1 & & \\
 \oplus & & \oplus \\
 A_2 \cong B_1^2 \oplus \dots \oplus B_m^2 & & \\
 \vdots & & \vdots \\
 \oplus & & \oplus \\
 A_n \cong B_1^n \oplus \dots \oplus B_m^n & & \\
 \parallel & & \parallel \\
 B_1 & & B_m
 \end{array}
 \quad \text{d.h.} \quad A \cong B.$$

Sei nun $E_F(A) \subsetneq E_F(B)$, mit 8.2 und 8.5 also sogar $E_F(A) \subsetneq^{\oplus} E_F(B)$.

Sei $E_F(A) \oplus H = E_F(B)$ für ein $H \subsetneq^{\oplus} E_F(B)$. Mit 7.4 und 7.3 ergibt sich $H = E_F(H \cap B)$, $E_F(A \oplus (H \cap B)) \cong E_F(A) \oplus E_F(H \cap B) \cong E_F(B)$. Aus dem ersten Teil des Beweises folgt die Behauptung.

' $\Rightarrow$ ' folgt aus 7.3.

#

Mittels 8.6 kann nun in 8.7 die von Goodearl in ([5], Problems) gestellte Frage beantwortet werden, ob für einen regulären, rechts χ_o -stetigen Ring R und zwei endlich erzeugte, projektive R -Moduln A und B die Isomorphie von $A \otimes_R S$ und $B \otimes_R S$ bereits die Isomorphie von A und B impliziert.

8.7 Folgerung

Seien A und B endlich erzeugte, projektive Moduln über einem regulären, rechts χ_o -stetigen Ring R . Dann gilt:

$$A \otimes_R S \cong (\subsetneq) B \otimes_R S \Leftrightarrow A \cong (\subsetneq) B.$$

Beweis

Wir zeigen, daß für einen endlich erzeugten, projektiven R -Modul $C \subsetneq \otimes_R S$ (bis auf Isomorphie) eine F -injektive Hülle von C ist. Die Behauptung ergibt sich dann aus 8.6.

Es existieren Idempotente $e_1, \dots, e_n$ aus R , so daß $C \cong \bigoplus_{i=1}^n e_i R$, also

$$C \otimes_R S \cong \left(\bigoplus_{i=1}^n e_i R \right) \otimes_R S \cong \bigoplus_{i=1}^n (e_i R \otimes_R S) \cong \bigoplus_{i=1}^n e_i S.$$

11

Endlich erzeugte, projektive Moduln M über regulären, rechts χ_o -stetigen Ringen müssen im allgemeinen nicht χ_o -stetig sein, d.h. zu χ_o -wesentlich erzeugten Untermoduln U von M müssen keine Hüllen $\bar{U}$ existieren. Satz 8.8 sagt insbesondere aus, daß, falls für χ_o -wesentlich erzeugte Untermoduln U_1 und U_2 von M , $U_1 \cong U_2$, Hüllen existieren, diese auch isomorph sind. Für den Fall, daß R zusätzlich direkt finit ist, hat dies Goodearl in ([7], Cor. 2.3) bewiesen.

8.8 Satz

Sei R ein regulärer, rechts χ_0 -stetiger Ring. Dann gilt für endlich erzeugte, projektive R -Moduln A und B :

- Sind $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ bzw. $B_1 \subset B_2 \subset \dots$ aufsteigende Folgen von endlich erzeugten Untermoduln von A bzw. B , so daß $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \subset A$, $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \subset B$, $A_i \cong B_i$ für $i \in \mathbb{N}$, so gilt $A \cong B$.
- Ist $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ eine aufsteigende Folge von endlich erzeugten Untermoduln von A , so daß $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \subset A$, $A_i \subset B$ für $i \in \mathbb{N}$, so ist $A \subset B$.

Beweis

Wegen 8.4 ist $(nS)_S$ χ_0 -stetig für alle $n \in \mathbb{N}$. Es existiert eine Familie $(L_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Untermoduln von A , so daß $\sum_{i=1}^n L_i = \bigoplus_{i=1}^n L_i = A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei o.E. $A = \bigoplus_{i=1}^{\infty} e_i R$ für Idempotente e_i von R . Wir haben das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^n e_i R \otimes_R R & \subset & \bigoplus_{i=1}^n e_i R \otimes_R S \\ \uparrow \wr \text{ kan.} & & \uparrow \wr \text{ kan.} \\ \bigoplus_{i=1}^n e_i R & \subset & \bigoplus_{i=1}^n e_i S \end{array}, \text{ also } A \otimes_R R \subset A \otimes_R S.$$

Aus $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} L_i \otimes_R R \subset A \otimes_R R \subset A \otimes_R S$ folgt somit auch $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} L_i \otimes_R S \subset A \otimes_R S$.

Es gilt $\bigoplus_{i=1}^n L_i \otimes_R S \subset B \otimes_R S$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $B \otimes_R S$ ist endlich erzeugter, projektiver S -Modul und damit χ_0 -stetig. Mit 3.5 existiert eine Familie

$(C_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Untermoduln von $B \otimes_R S$ derart, daß $\sum_{i \in \mathbb{N}} C_i = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} C_i \subset B \otimes_R S$ und $C_i \cong L_i \otimes_R S$. Dann ist $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} C_i \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} (L_i \otimes_R S) \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} L_i \otimes_R S$.

Sei $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} C_i \subset C \subset B \otimes_R S$. Mit 5.23 folgt $A \otimes_R S \cong C \subset B \otimes_R S$. Analog ergibt sich $B \otimes_R S \subset A \otimes_R S$. 2.3 besagt, daß $A \otimes_R S \cong B \otimes_R S$ ist und aus 8.7 folgt die Behauptung.

- Wie in a) folgt $A \otimes_R S \subset B \otimes_R S$, also $A \subset B$. #

Es sei bemerkt, daß in der Voraussetzung von 8.8 die Faktoren A_{i+1}/A_i im Gegensatz zum direkt finiten Fall durchaus nicht isomorph zu B_{i+1}/B_i sein müssen.

Die kommenden zwei Sätze wurden in [7] von Goodearl mit der zusätzlichen Voraussetzung der direkten Finitheit für den zugrunde liegenden Ring bewiesen.

8.9 Satz

Sei R ein regulärer, rechts χ_o -stetiger Ring, S sein maximaler Rechts- χ_o -Quotientenring. Dann ist $j: K_o(R) \longrightarrow K_o(S)$, $[A] - [B] \longmapsto [A \otimes_R S] - [B \otimes_R S]$, ein Isomorphismus zwischen partiell geordneten Gruppen.

Beweis

Offenbar ist j ein Gruppenhomomorphismus sowie $j(x) \geq 0$ für $x \in K_o(R)$, $x \geq 0$.

Sei $0 \leq y \in K_o(S)$, d.h. $y = [C]$ für ein $C \in X(S)$.

Sei $C \in nS_S = E_F(nR_R)$. Aus 7.4 folgt, daß $C \cap nR_R \subseteq nR_R$ sowie $E_F(C \cap nR_R) = C$ gilt. Wie in 8.7 ergibt sich, daß $(C \cap nR_R) \otimes_R S$ bis auf Isomorphie eine F -injektive Hülle von $C \cap nR_R$ ist, also $j([C \cap nR_R]_R) = [(C \cap nR_R) \otimes_R S] = [C] = y$. Da alle Elemente von $K_o(S)$ Differenzen zweier positiver Elemente sind, ist j surjektiv gezeigt.

Sei $x \in \text{Kern}(j)$, $x = [A] - [B]$ für $A, B \in X(R)$. Es ist $[A \otimes_R S] - [B \otimes_R S] = 0$, also $(A \otimes_R S) \oplus nS_S \cong (B \otimes_R S) \oplus nS_S$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Somit gilt

$(A \oplus nR_R) \otimes_R S \cong (B \oplus nR_R) \otimes_R S$ und mit 8.7 $A \oplus nR_R \cong B \oplus nR_R$ d.h. $[A] = [B]$.

Da auch j^{-1} eine positive Abbildung ist, ist 8.9 bewiesen. **

8.10 Satz

Sei R ein regulärer, rechts χ_o -stetiger Ring. Dann ist $K_o(R)$ eine σ -vollständige Interpolationsgruppe.

Beweis

Wegen des Isomorphismus zwischen $K_o(R)$ und $K_o(S)$ kann o.E. $(nR)_R$ χ_o -stetig für alle $n \in \mathbb{N}$ angenommen werden. Aufgrund von 6.4 ist $K_o(R)$ eine Interpolationsgruppe. Sei eine aufsteigende, nach oben beschränkte Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $K_o(R)$ gegeben, also $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq a$ für ein $a \in K_o(R)$. Für $x_1 = b - c$, $b, c \geq 0$, ergibt sich $0 \leq x_1 + c \leq x_2 + c \leq \dots \leq a + c$. Sei für $i \in \mathbb{N}$ $x_1 + c = [A_i]$ für $A_i \in X(R)$, o.E. $a + c = (k - 1)R_R$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Wegen 6.3 gilt $A_1 \oplus R_R \subsetneq A_2 \oplus R_R \subsetneq \dots \subsetneq kR_R$. Wegen 3.5 existieren für $i \in \mathbb{N}$ Untermoduln L_i, R_i von kR_R mit $L_i \cong A_i$, $R_i \cong R_R$, und $L_1 \oplus R_1 \subsetneq L_2 \oplus R_2 \subsetneq \dots \subsetneq kR_R$.

Wir behaupten, daß $x := \overline{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (L_i \oplus R_i)} - c - [R_R]$ das gesuchte Supremum ist:

Klar ist für $i \in \mathbb{N}$ $x_1 + c \leq x + c$, denn $A_i \oplus R_R \cong L_i \oplus R_i \subsetneq \overline{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (L_i \oplus R_i)}$.

Sei jetzt $y \in K_o(R)$, $y \geq x_1$, d.h. $0 \leq x_1 + c \leq y + c$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Es ist $y + c = [C]$ für ein $C \in X(R)$. Somit ist $A_i \oplus R_R \subsetneq C \oplus R_R$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Wegen 3.5 existieren für $i \in \mathbb{N}$ endlich erzeugte Untermoduln $\tilde{L}_i, \tilde{R}_i$ von $C \oplus R_R$, so daß $\tilde{L}_i \cong L_i$, $\tilde{R}_i \cong R_i$ und $\tilde{L}_1 \oplus \tilde{R}_1 \subsetneq \tilde{L}_2 \oplus \tilde{R}_2 \subsetneq \dots \subsetneq C \oplus R_R$. Mit 8.8 ist $\overline{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (\tilde{L}_i \oplus \tilde{R}_i)} \cong \overline{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (L_i \oplus R_i)}$, also $x + c \leq [C] = y + c$, d.h. $x \leq y$. **

§2 Faktorringe von regulären, rechts χ_0 -stetigen Ringen

Viele Eigenschaften regulärer, rechts χ_0 -stetiger Ringe gelten auch für ihre Faktorringe. Wie z.B. der Endomorphismenring eines unendlich dimensionalen Vektorraumes modulo dem Ideal der endlich-wertigen Homomorphismen zeigt ([5], Ex. 9.34), müssen diese keineswegs mehr rechts χ_0 -stetig sein.

8.11 Bemerkung

Für einen regulären Ring R , ein Ideal J und ein $M \in X(R/J)$ gibt es wegen ([5], Prop. 2.17) ein $A \in X(R)$, so daß $A/AJ \cong M$ gilt. Dies voraussetzend bezeichnen wir endlich erzeugte, projektive R/J -Moduln M durch $\bar{A}$, wobei $\bar{A} := A/AJ \cong M$, $A \in X(R)$.

8.12 Satz

Sei R ein regulärer, rechts χ_0 -stetiger Ring, J ein Ideal in R , $\bar{A} \in X(R/J)$.

Dann gilt:

- Ist $\bar{A} \oplus H \cong \bar{A} \oplus K$ für (R/J) -Moduln H und K , dann existieren Zerlegungen $H = H_1 \oplus H_2$, $K = K_1 \oplus K_2$, so daß $H_1 \cong K_1$, $\bar{A} \oplus H_2 \cong \bar{A} \oplus K_2$ für alle direkten Summanden H_2 von H und K_2 von K . Zu H und K existiert ein $\bar{L} \subseteq \bar{A}$ mit $H, K \subseteq \bar{L}$ und $\bar{L} \oplus \bar{L} \cong \bar{L}$, $\bar{A} \oplus \bar{L} \cong \bar{A}$.
- Ist $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ und $\bar{B} \subseteq \bar{A}$, so gilt $\bar{A} \cong \bar{B}$.
- Ist $n\bar{A} \cong (\bigoplus_{i=1}^n \bar{A})$, so gilt $\bar{A} \cong (\bigoplus_{i=1}^n \bar{A})$.

Beweis

Weil R/J die endliche Austauscheigenschaft besitzt, kann wie im Beweis zu 3.3 o.E. $H, K \in X(R/J)$ angenommen werden. Sei $H = \bar{B}$, $K = \bar{C}$, $B, C \in X(R)$. Wir haben $\bar{A} \oplus H \cong \bar{A} \oplus \bar{B} \cong \overline{A \oplus B} \cong \overline{A \oplus C} \cong \bar{A} \oplus \bar{C} \cong \bar{A} \oplus K$. Wegen ([5], Prop. 2.19) gibt es Zerlegungen $A = A_{11} \oplus A_{12}$, $B = B_1 \oplus B_2$, $A = A_{21} \oplus A_{22}$, $C = C_1 \oplus C_2$, so daß $A_{11} \oplus B_1 \cong A_{21} \oplus C_1$, $A_{12} \oplus B_2 \cong A_{22} \oplus C_2$. Weil somit $A \oplus A_{22} \oplus B_1 \cong A \oplus A_{12} \oplus C_1$ gilt, existieren wegen 5.6 Zerlegungen $A_{22} = A_{22}' \oplus A_{22}''$, $B_1 = B_1' \oplus B_1''$, $A_{12} = A_{12}' \oplus A_{12}''$, $C_1 = C_1' \oplus C_1''$, so daß $A_{22}' \oplus B_1' \cong A_{12}' \oplus C_1'$, sowie $\chi_0(A_{22}'' \oplus B_1'' \oplus A_{12}'' \oplus C_1'') \subseteq M$ für einen χ_0 -quasistetigen, direkten Summanden M von A . Mit 2.1 folgt, daß $A \oplus B \cong A \oplus C \cong A$ für alle direkten Summanden B von B_1 , C von C_1 , sowie mit

$$L := \overline{X_O(A_{22}'' \oplus B_1'' \oplus A_{12}'' \oplus C_1'')}, \quad L \oplus L \cong L, \quad A \oplus L \cong A.$$

Es bestehen die Isomorphismen $\bar{B} \cong \bar{B}_1' \oplus \bar{B}_1''$, $\bar{C} \cong \bar{C}_1' \oplus \bar{C}_1''$, $\bar{B}_1' \cong \bar{C}_1'$. Ist T ein direkter Summand von $\bar{B}_1''$, so gibt es wegen ([5], Prop. 2.20) einen direkten Summanden U von $\bar{B}_1''$ mit $T \cong \bar{U}$, also $\bar{A} \oplus T \cong \bar{A}$. Analog folgt $\bar{A} \oplus U \cong \bar{A}$ für $U \cong \bar{C}_1''$. Klar ist $T, U \subsetneq \bar{L} \subsetneq \bar{A}$, $\bar{L} \oplus \bar{L} \cong \bar{L}$, $\bar{A} \oplus \bar{L} \cong \bar{A}$. Weil $H \cong \bar{B}$, $K \cong \bar{C}$ gilt, existieren die behaupteten Zerlegungen von H und K .

b) Sei $\bar{A} \oplus H \oplus K \cong \bar{A}$, $\bar{A} \oplus H \cong \bar{B}$. Mit a) folgt die Behauptung.

c) Sei $n\bar{A} \subsetneq n\bar{B}$. Mit ([5], Prop. 2.19) gibt es für $i = 1, \dots, n$ Zerlegungen

$$A = A_{11} \oplus A_{12}, \quad B = B_{11} \oplus B_{12} \quad \text{mit} \quad \bigoplus_{i=1}^n A_{11} \subsetneq \bigoplus_{i=1}^n B_{11}, \quad A_{12}J = A_{12}, \quad B_{12}J = B_{12}, \quad \text{d.h.}$$

$$\bar{A} \cong \bar{A}_{11}, \quad \bar{B} \cong \bar{B}_{11}. \quad \text{Offenbar gilt jetzt } n\bar{A} \subsetneq n\bar{B} \oplus n\left(\bigoplus_{i=1}^n A_{12}\right), \quad \text{also wegen 5.21}$$

$$A \subsetneq B \oplus \bigoplus_{i=1}^n A_{12}, \quad \text{d.h. } \bar{A} \subsetneq \bar{B}.$$

Ist $\bar{A} \cong \bar{B}$, so folgt auch $\bar{B} \subsetneq \bar{A}$ und wegen b) $\bar{A} \cong \bar{B}$.

#

8.13 Folgerung

Sei R ein regulärer, rechts X_O -stetiger Ring, J ein Ideal in R , so daß R/J direkt finit ist. Dann hat $(R/J)_{(R,J)}$ die Substitutionseigenschaft, ist mit ([22], Th. 2.1, 2.4) also unit-regulär.

Beweis

Es reicht, die Kürzungseigenschaft nachzuweisen. Diese folgt aus 8.12.

#

Später werden wir jene Ideale J , für welche R/J unit-regulär ist, genauer bestimmen.

8.14 Lemma

Sei R ein regulärer, rechts X_O -stetiger Ring. Dann gibt es für Familien $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von Moduln A_i und B_j aus $X(R)$ mit $A_i \cong B_j$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ einen Modul $C \in X(R)$, so daß $A_i \subsetneq C \subsetneq B_j$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$.

Beweis

Es gilt $A_i \otimes_R S \subsetneq B_j \otimes_R S$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$. Wegen 5.26 gibt es ein $D \in X(S)$ mit $A_i \otimes_R S \subsetneq D \subsetneq B_j \otimes_R S$. Da $D \cong C \otimes_R S$ für ein $C \in X(R)$ folgt mit 8.7 die Behauptung.

#

Goodearl hat, wie schon erwähnt, in ([7], Th. 3.2) gezeigt, daß Faktoringe regulärer, rechts X_O -stetiger Ringe die abzählbare Interpolationseigenschaft erfüllen. Dieses Ergebnis folgt aus Satz 8.15. Widerum ist die direkte Finitheit nicht notwendig.

8.15 Satz

Sei R ein regulärer, rechts χ_0 -stetiger Ring, J ein Ideal von R . Dann gibt es für Familien $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von Moduln A_i und B_j aus $X(R)$ mit $\bar{A}_i \subsetneq \bar{B}_j$ für $i, j \in \mathbb{N}$ einen Modul $C \in X(R/J)$, so daß $\bar{A}_i \subsetneq C \subsetneq \bar{B}_j$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$.

Beweis

Seien Familien $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von Moduln A_i und B_j aus $X(R)$ gegeben mit $\bar{A}_i \subsetneq \bar{B}_j$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$.

Mit 8.14 reicht es, zu zeigen, daß es für $i, j \in \mathbb{N}$ $H_i, K_j \in X(R)$ gibt mit $\bar{H}_i \cong \bar{A}_i$, $\bar{K}_j \cong \bar{B}_j$, $H_i \subsetneq K_j$.

Seien bereits für $n, m \in \mathbb{N}$ $H_1, \dots, H_n, K_1, \dots, K_m \in X(R)$ gegeben derart, daß $H_1, \dots, H_n \subsetneq K_1, \dots, K_m$ und $\bar{H}_1 = \bar{A}_1, \dots, \bar{H}_n = \bar{A}_n$, $\bar{K}_1 = \bar{B}_1, \dots, \bar{K}_m = \bar{B}_m$. Wir betrachten $\bar{B}_{m+1}$: wegen $\bar{H}_1, \dots, \bar{H}_n \subsetneq \bar{B}_{m+1}$ gibt es mit ([5], 2.20) Zerlegungen $H_i = H_{i1} \oplus H_{i2}$, $i = 1, \dots, n$, so daß $H_{i1} \subsetneq B_{m+1}$, $H_{i2}J = H_{i2}$. Klar ist dann $H_i \subsetneq B_{m+1} \oplus \bigoplus_{i=1}^n H_{i2} =: K_{m+1}$, $\bar{B}_{m+1} \cong \bar{K}_{m+1}$.

Wir betrachten $\bar{A}_{n+1}$: weil $\bar{A}_{n+1} \subsetneq \bar{K}_1, \dots, \bar{K}_{m+1}$ ist, gibt es für $j = 1, \dots, m+1$ Zerlegungen $A_{n+1} = V_{j1} \oplus V_{j2}$, so daß $V_{j1} \subsetneq K_j$, $V_{j2}J = V_{j2}$. Hieraus folgt $\bar{A}_{n+1} \cong \bar{V}_{j1}$ für $j = 1, \dots, m+1$, und das Anwenden von ([5], 2.19) liefert einen direkten Summanden H_{n+1} von A_{n+1} mit $\bar{H}_{n+1} \cong \bar{A}_{n+1}$ sowie $H_{n+1} \subsetneq V_{j1} \subsetneq K_j$ für $j = 1, \dots, m+1$. ■

8.16 Folgerung

Ein Faktorring eines regulären, rechts χ_0 -stetigen Ringes besitzt die abzählbare Interpolationseigenschaft.

Als nächstes Ziel steuern wir den Beweis der Aussagen von 8.6, 8.7 und in leicht abgeschwächter Form von 8.8 für Faktorringe regulärer, rechts χ_0 -stetiger Ringe an. Vorerst jedoch einige Lemmata.

8.17 Lemma ([5], Prop. 3.15)

Seien $R \subset S$ reguläre Ringe, so daß S alle Idempotente von R enthält. Dann gibt es einen Verbandsisomorphismus φ zwischen dem Verband $L_2(S)$ der Ideale von S und dem Verband $L_2(R)$ der Ideale von R .

Dabei ist für $J \in L_2(S)$ $\varphi(J) = J \cap R$ und für $K \in L_2(R)$ $\varphi^{-1}(K) = KS = SK$.

8.18 Lemma

Sei R ein regulärer, rechts χ_o -stetiger Ring, J ein Ideal in R . Dann ist R/J (bis auf Isomorphie) ein Unterring von S/JS und R/J enthält alle Idempotente von S/JS .

Beweis

Idempotente aus S/JS lassen sich mit ([5], Prop. 2.18) zu Idempotenten in S hochheben und diese sind Idempotente in R . #

8.19 Lemma ([6], Lemma II.14.11)

Faktorringe von rechts χ_o -injektiven Ringen sind rechts χ_o -injektiv.

8.20 Lemma

Sei R ein regulärer, rechts χ_o -stetiger Ring, J ein Ideal in R und S der maximale Rechts- χ_o -Quotientenring von R . Dann gilt für Idempotente

$x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \in \bar{R} := R/J \subset S/SJ =: \bar{S}$: Ist

$x_1 \bar{S} \oplus \dots \oplus x_n \bar{S} \cong (\bigoplus_{i=1}^n y_i \bar{S} \oplus \dots \oplus y_n \bar{S})$, so ist $x_1 \bar{R} \oplus \dots \oplus x_n \bar{R} \cong (\bigoplus_{i=1}^n y_i \bar{R} \oplus \dots \oplus y_n \bar{R})$.

Beweis

Sei zunächst $\bigoplus_{i=1}^n x_i \bar{S} \cong \bigoplus_{i=1}^n y_i \bar{S}$:

Wegen ([5], Prop. 2.18) gibt es Idempotente $e_1, e_2, \dots, e_n, f_1, f_2, \dots, f_n$ aus R , so daß $x_i = \bar{e}_i, y_i = \bar{f}_i$ für $i = 1, \dots, n$.

Somit gilt $\bigoplus_{i=1}^n e_i S / (\bigoplus_{i=1}^n e_i S)JS \cong \bigoplus_{i=1}^n \bar{e}_i \bar{S} \cong \bigoplus_{i=1}^n \bar{f}_i \bar{S} \cong \bigoplus_{i=1}^n f_i S / (\bigoplus_{i=1}^n f_i S)JS$. Wegen ([5], Prop. 2.17, 2.19) existieren Idempotente e'_i, e''_i, f'_i, f''_i von S und damit von R , so daß $e_i = e'_i + e''_i, f_i = f'_i + f''_i$ und $\bigoplus_{i=1}^n e'_i S \cong \bigoplus_{i=1}^n f'_i S, (\bigoplus_{i=1}^n e''_i S)SJ = \bigoplus_{i=1}^n e''_i S, (\bigoplus_{i=1}^n f''_i S)SJ = \bigoplus_{i=1}^n f''_i S$. Es folgt $e''_i SJ = e''_i S, f''_i SJ = f''_i S$, d.h. $e''_i \in SJ \cap R = J, f''_i \in SJ \cap R = J$, also $\bar{e}''_i = \bar{0}, \bar{f}''_i = \bar{0}$ in R/J und S/SJ . Aus $\bigoplus_{i=1}^n e'_i S \cong \bigoplus_{i=1}^n f'_i S$

ergibt sich mit 8.2 und 8.7 $\bigoplus_{i=1}^n e'_i R \cong \bigoplus_{i=1}^n f'_i R$ und somit

$$\bigoplus_{i=1}^n x_i \bar{R} = \bigoplus_{i=1}^n \bar{e}_i \bar{R} = \bigoplus_{i=1}^n \bar{e}'_i \bar{R} \cong \bigoplus_{i=1}^n \bar{f}'_i \bar{R} = \bigoplus_{i=1}^n \bar{f}_i \bar{R} = \bigoplus_{i=1}^n y_i \bar{R}.$$

Ist $\bigoplus_{i=1}^n x_i \bar{S} \cong \bigoplus_{i=1}^n y_i \bar{S}$, so folgt $\bigoplus_{i=1}^n x_i \bar{R} \cong \bigoplus_{i=1}^n y_i \bar{R} \cong \bigoplus_{i=1}^n x_i \bar{R}$. Wegen 8.12 ist dann $\bigoplus_{i=1}^n x_i \bar{R} \cong \bigoplus_{i=1}^n y_i \bar{R}$. #

8.21 Satz

Sei R ein regulärer, rechts χ_o -stetiger Ring, J ein Ideal in R und C und D endlich erzeugte, projektive $\bar{R}$ -Moduln. Dann gilt:

- Ist $C' \subset C, D' \subset D, C' \cong D'$ χ_o -erzeugt, so ist $C \cong D$.
- Ist $C' \subset C, D' \subset D, C' \cong D'$ χ_o -erzeugt, so ist $C \cong D$.

Beweis

- a) Wir können o.E. die Existenz von Idempotenten $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ in $\bar{R}$ annehmen derart, daß $C = \bigoplus_{i=1}^n x_i \bar{R}$, $D = \bigoplus_{i=1}^n y_i \bar{R}$. Weiter kann wegen Lemma 5.17 $D' = \bigoplus_{i=1}^n D_i$, $D_i \subset y_i \bar{R}$ angenommen werden. Wegen ([5], Prop. 2.14) existieren für $i \in \{1, \dots, n\}$ Familien $(y_i^j)_{j \in \mathbb{N}}$ orthogonaler Idempotenten aus $\bar{R}$ mit $D_i = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} y_i^j \bar{R}$. Offenbar ist $\sum_{j \in \mathbb{N}} y_i^j \bar{S} = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} y_i^j \bar{S} \subset y_i \bar{S}$. Sei h ein Isomorphismus von D' nach C' . Da die Idempotenten von $\bar{S}$ in $\bar{R}$ liegen, läßt sich der Isomorphismus $h|_{y_i \bar{R}}: y_i \bar{R} \longrightarrow h(y_i^j) \bar{R}$ zu einem $\bar{S}$ -Isomorphismus von $y_i \bar{S}$ nach $h(y_i^j) \bar{S} \subset \bigoplus_{i=1}^n x_i \bar{S}$ hochheben. Wir erhalten somit auf kanonische Weise einen $\bar{S}$ -Homomorphismus h' von $\bigoplus_{i=1}^n \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} y_i^j \bar{S}$ nach $\sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathbb{N}} h(y_i^j) \bar{S} \subset \bigoplus_{i=1}^n x_i \bar{S}$. Da wegen 8.19 $\bar{S}_S \bar{S}_S - \chi_o$ -injektiv ist, folgt mit 5.8, daß $\bigoplus_{k=1}^n x_k \bar{S} - \chi_o$ -injektiv ist für $i = 1, \dots, n$, h' läßt sich also zu einem $\bar{S}$ -Homomorphismus g von $\bigoplus_{i=1}^n y_i \bar{S}$ nach $\bigoplus_{i=1}^n x_i \bar{S}$ fortsetzen.

Wir zeigen, daß g ein Epimorphismus ist:

Dies ist mit $\text{Bi}(g) \in \bigoplus_{i=1}^n x_i \bar{S}$ gezeigt. Klar ist $C' \cap x_i \bar{R} \in x_i \bar{R}$ für $i = 1, \dots, n$. Es existieren für $i \in \{1, \dots, n\}$ Familien $(x_i^j)_{j \in \mathbb{N}}$ orthogonaler Idempotenten aus $\bar{R}$ mit $C' \cap x_i \bar{R} = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} x_i^j \bar{R}$. Wir sehen, daß $\sum_{j \in \mathbb{N}} x_i^j \bar{S} = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} x_i^j \bar{S} \subset x_i \bar{S}$ gilt. Weil $\bar{S}$ alle Idempotenten von $\bar{R}$ enthält, ist $\bigoplus_{j \in \mathbb{N}} x_i^j \bar{S} \in x_i \bar{S}$. Klar ist $x_i \bar{S} \subset \text{Bi}(g)$ für $i = 1, \dots, n$, $j \in \mathbb{N}$. g ist also ein Epimorphismus, d.h. $\bigoplus_{i=1}^n x_i \bar{S} \cong \bigoplus_{i=1}^n y_i \bar{S}$. Mit Lemma 8.20 folgt $C = \bigoplus_{i=1}^n x_i \bar{R} \cong \bigoplus_{i=1}^n y_i \bar{R} = D$.

- b) Aus a) folgt $C \cong D \cong C$ und mit 8.12 $C \cong D$.

■

8.22 Satz

Sei R ein regulärer, rechts χ_o -stetiger Ring, J ein Ideal in R und C, D endlich erzeugte, projektive R/J -Moduln. Dann gilt:

$$C \cong (\bigoplus_{i=1}^n D \Leftrightarrow E_f(C) \cong (\bigoplus_{i=1}^n E_f(D) \Leftrightarrow E_f(C) \subsetneq E_f(D).$$

Beweis

' $\Leftarrow$ ' Sei zunächst $E_f(C) \subsetneq E_f(D)$, f ein Monomorphismus von $E_f(C)$ nach $E_f(D)$. $f(C) \cap D$ und damit $f^{-1}(f(C) \cap D)$ sind wegen 7.4 χ_o -wesentlich erzeugt. Dabei ist $f(C) \cap D \in f(C)$, also $f^{-1}(f(C) \cap D) \in C$. Mit Lemma 8.21 folgt $C \cong D$.

Ist $E_f(C) \cong E_f(D)$, so folgt $C \cong D \cong C$, mit 8.12 also $C \cong D$.

' $\Rightarrow$ ' folgt aus 7.3.

■

Folgerung 8.23 beantwortet Problem 25 in [5] nun sogar für Faktorringe regulärer, rechts χ_0 -stetiger Ringe. Uns ist nicht bekannt, ob ihre maximalen Rechts- χ_0 -Quotientenringe überhaupt regulär sein müssen.

8.23 Folgerung

Sei R ein regulärer, rechts χ_0 -stetiger Ring, J ein Ideal in R , C, D endlich erzeugte, projektive R/J -Moduln und T der maximale Rechts- χ_0 -Quotientenring von R/J . Dann gilt:

$$C \cong (\bigoplus_{\alpha \in I} C) D \Leftrightarrow C \otimes_{R/J} T \cong (\bigoplus_{\alpha \in I} C) D \otimes_{R/J} T \Leftrightarrow C \otimes_{R/J} T \cong (\bigoplus_{\alpha \in I} C) D \otimes_{R/J} T.$$

Beweis

Wie in 8.7 sieht man, daß $C \otimes_{R/J} T$ bzw. $D \otimes_{R/J} T$ bis auf Isomorphie F -injektive Hüllen von C bzw. D sind. #

Im folgenden werden wir eine Teilmenge der Menge der zweiseitigen Ideale eines regulären, rechts χ_0 -stetigen Ringes betrachten.

8.24 Definition und Lemma

Sei R ein regulärer, rechts χ_0 -stetiger Ring, J ein Ideal in R . Dann ist für ein Element f in $\bar{R} := R/J$ $\{y \in \bar{R} \mid f\bar{R} \oplus y\bar{R} \cong f\bar{R}\}$ ein Ideal in $\bar{R}$ und wird mit $(f\bar{R})_\infty$ bezeichnet sowie $\{y \in \bar{R} \mid y\bar{R} \subsetneq n(f\bar{R}) \text{ für ein } n \in \mathbb{N}, y\bar{R} \text{ direkt finit}\}$ ein Ideal in $\bar{R}$ und wird mit $(f\bar{R})_{df}$ bezeichnet.

Beweis

Sei $y, z \in (f\bar{R})_\infty$, $r \in \bar{R}$. Es gilt $(y+z)\bar{R} \subset y\bar{R} + z\bar{R} \subsetneq (y\bar{R} \oplus z\bar{R})$ und wegen 8.12 $f\bar{R} \oplus (y+z)\bar{R} \cong f\bar{R}$, also $(y+z) \in (f\bar{R})_\infty$. Wegen $yr\bar{R} \subset y\bar{R}$, $ry\bar{R} \subsetneq y\bar{R}$ folgt gleichfalls mit 8.12, daß $ry, yr \in (f\bar{R})_\infty$ ist.

Sei $y, z \in (f\bar{R})_{df}$, $r \in \bar{R}$. Wegen 8.13 haben $y\bar{R}$ und $z\bar{R}$, also auch $(y\bar{R} \oplus z\bar{R})$ und $(y+z)\bar{R}$ die Kürzungseigenschaft. Offenbar ist auch $(y+z)\bar{R} \subsetneq n f\bar{R}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Somit gilt $(y+z) \in (f\bar{R})_{df}$. Ähnlich folgt $ry, yr \in (f\bar{R})_{df}$. #

Nun wie oben angekündigt, eine Bestimmung derjenigen Ideale, für die die Faktorringe unit-regulär sind.

8.25 Satz

Sei R ein regulärer, rechts χ_o -stetiger Ring, J ein Ideal in R . Dann ist R/J genau dann direkt finit, wenn $R_\infty \subset J$ gilt.

Beweis

Sei zunächst R/J direkt finit, $x \in R_\infty$. Wir zeigen, daß ein Idempotent e in R existiert mit $x \in eR$ und $2eR \cong eR$:

Zunächst gibt es wegen 2.1 ein $x_1 \in R$, $V \subset R_R$, so daß $x_1R \cong xR$,

$x_1R + V = x_1R \oplus V$ und $2(x_1R \oplus V) \cong x_1R \oplus V$. Sei $xR \oplus W = R_R$. Dann finden wir mit 3.3 ein $W' \subset W$ mit $xR \oplus W' \cong x_1R \oplus V$. Klar ist $xR \oplus W' = eR$ für ein Idempotent e in R .

Somit gilt $2(\overline{eR}) \cong \overline{eR}$, d.h. $\bar{R}_R \cong \overline{eR} \oplus (\overline{1-e})\bar{R} \cong \bar{R}_R \oplus \overline{eR}$. $\overline{eR}$ ist also Null, d.h. $eR = eRJ = eJ$ und damit $e \in J$, $x \in J$.

Sei nun $R_\infty \subset J$, $\bar{R}_R \oplus H \cong \bar{R}_R$. O.E. kann $H = \overline{eR}$ für ein Idempotent e in R angenommen werden. Mit ([5], Prop. 2.19) gibt es Zerlegungen $R_R = R_{11} \oplus R_{12}$, $R_R = R_{21} \oplus R_{22}$, $eR = A_1 \oplus A_2$, so daß $R_{11} \oplus A_1 \cong R_{21}$, $R_{12}J = R_{12}$, $A_2J = A_2$, $R_{22}J = R_{22}$. Aus $R_R \oplus R_{22} \oplus A_1 \cong R_R \oplus R_{12}$ folgt die Existenz von Zerlegungen: $R_{22} = R_{22}' \oplus R_{22}''$, $A_1 = A_1' \oplus A_1''$, $R_{12} = R_{12}' \oplus R_{12}''$ mit $R_{22}' \oplus A_1' \cong R_{12}'$, $\chi_o(R_{22}' \oplus A_1' \oplus R_{12}'') \subset R_R$. Dies ergibt insbesondere $A_1'' \subset J$, also $\overline{A_1''} = 0$. Weil auch $A_1'J = A_1'$, $A_2J = A_2$ gilt, ist $\overline{eR} = 0$. #

Satz 8.26 gibt eine Menge von Idealen eines regulären, rechts χ_o -stetigen Ringes an, für welche der Faktorring weiterhin rechts χ_o -stetig ist.

8.26 Satz

Sei R ein regulärer, rechts χ_o -stetiger Ring, y ein Element von R .

Dann ist $\bar{R} := R/(yR)_\infty$ gleichfalls ein regulärer, rechts χ_o -stetiger Ring.

Beweis

Sei I ein χ_o -erzeugtes Rechtsideal in $\bar{R}$. Wegen ([5], Prop. 2.14) gibt es orthogonale Idempotenten $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots \in \bar{R}$ ($e_i \in R$), so daß $I = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \bar{e}_i \bar{R}$. Wegen ([5], Prop. 2.18) können o.E. die e_i als orthogonal in R angenommen werden. Sei $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} e_i R \subset eR$ für ein Idempotent e in R .

Wir behaupten, daß $I \subset \overline{eR}$ gilt:

Sei $x \in eR$ mit $\bar{x}\bar{R} \cap I = 0$ und $\bar{x} = \bar{x}^2$. Wegen ([5], Prop. 2.18) existiert ein Idempotent $f \in eR$ mit $\bar{f} = \bar{x}$. Sei für $n \in \mathbb{N}$ $\bigoplus_{i=1}^n e_i R \cap fR = f_n R$ für Idempotenten f_n von R .

Offenbar ist $\bar{f}_n \bar{R} = 0$, also $f_n \in (yR)_\infty$. Es gibt nun Idempotente $f'_n \in f_n R$, so daß $fR \cap \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} e_i R = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} f'_i R$. Klar ist $fR \cap \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} e_i R \subseteq fR$, d.h. $\overline{\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} f'_i R} = fR$.

Mit 2.1 haben wir $\chi_o f'_n R \subsetneq yR$, $\overline{\chi_o f'_n R} \oplus yR \cong yR$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \chi_o f'_n R = \chi_o \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} f'_n R \subsetneq yR, \chi_o \overline{\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} f'_n R} \subsetneq yR, \text{ also } yR \oplus fR \cong yR \text{ und somit } f \in (yR)_\infty.$$

Dies bedeutet $\bar{x} \bar{R} = 0$, d.h. $1 \in \bar{e} \bar{R}$.

■

Die einfachen Faktorringe unit-regulärer, rechts χ_o -stetiger Ringe hat Goodearl in [7] als rechts injektiv bewiesen. Für reguläre, rechts χ_o -stetige Ringe beschreibt Satz 8.27 die einfachen Faktorringe.

8.27 Satz

Sei R ein regulärer, rechts χ_o -stetiger Ring und M ein maximales Ideal.

Dann ist $\bar{R} := R/M$ entweder ein einfacher, unit-regulärer, rechts injektiver Ring oder R/M ist ein einfacher, regulärer Ring mit $n(R/M)_{R/M} \cong (R/M)_{R/M}$, $f\bar{R} \cong \bar{R}_{\bar{R}}$ für alle $0 \neq f \in \bar{R}$.

Beweis

Ist $\bar{R}$ direkt finit, so ist mit 8.25 $R_\infty \subset M$, also ein M/R_∞ ein maximales Ideal in R/R_∞ . R/R_∞ ist wegen 8.13 und 8.26 unit-regulär, rechts χ_o -stetig. Mit ([7], Th.1.9) ist dann $\bar{R}$ rechts injektiv, unit-regulär. Ist $\bar{R}$ nicht direkt finit, so ist kein von Null verschiedenes, zyklisches Rechtsideal von $\bar{R}$ direkt finit, weil $\bar{R}_{df} = 0$ ist. Somit ist für alle von Null verschiedenen Elemente f von $\bar{R}$ $(f\bar{R})_\infty = \bar{R}$, d.h. $f\bar{R} \oplus \bar{R}_{\bar{R}} \cong f\bar{R}$, aber auch $\bar{R}_{\bar{R}} \oplus f\bar{R} \cong \bar{R}_{\bar{R}}$, d.h. $f\bar{R} \cong \bar{R}_{\bar{R}}$. $n\bar{R}_{\bar{R}} \cong \bar{R}_{\bar{R}}$ ist nun klar. ■

Die folgenden zwei Sätze machen Aussagen über die Grothendieckgruppe von Faktorringen regulärer, rechts χ_o -stetiger Ringe.

8.28 Satz

Sei R ein regulärer, rechts χ_o -stetiger Ring, J ein Ideal in R .

Dann ist für $T := J + R_\infty$ $K_o(R/J) \cong K_o(R/T)$.

Beweis

Seien die Elemente von $X(R/T)$ durch $\tilde{A}$ für $\tilde{A} = A/AT$, $A \in X(R)$, bezeichnet. Wir zeigen, daß $f: K_o(R/J) \longrightarrow K_o(R/T)$, $[\tilde{A}] - [\tilde{B}] \longmapsto [\tilde{A}] - [\tilde{B}]$ ein Isomorphismus ist.

Wegen $\tilde{A} = A/AT \cong A \otimes_R R/T$ folgt mit ([5], Prop. 15.15), daß f ein Epimorphismus ist, $f(K_O(R/J)^+) = K_O(R/T)^+$ gilt und $\text{Ker}(f)$ durch $\{[\bar{x}\bar{R}] \mid \bar{x} \in T/J\}$ erzeugt wird. Sei $xR = eR$ für ein Idempotent e in R , x o.E. Element von R_∞ . Dann gilt $R_R \oplus eR \cong R_R$, also $\bar{R}_R \oplus \bar{e}\bar{R} \cong \bar{R}_R \oplus \bar{e}\bar{R} = \bar{R}_R \oplus \bar{x}\bar{R} \cong \bar{R}_R$. $[\bar{x}\bar{R}]$ ist somit Null. Klar ist auch f^{-1} eine positive Abbildung. #

8.29 Satz

Sei R ein regulärer, rechts χ_o -stetiger Ring, J ein Ideal in R .

Dann ist $K_O(S/JS) \cong K_O(R/J)$.

Beweis

Wegen Lemma 8.17 ist $JS = SJ$ ein Ideal in S mit $SJ \cap R = J$.

Wir zeigen, daß $R_\infty \subset J$ genau dann wenn $S_\infty \subset JS$. Hieraus folgt insbesondere $S_\infty = R_\infty S$.

Sei $y \in S$ mit $\chi_o(yS) \subsetneq S_S$. Es existiert ein Idempotent $f \in R$ mit $fS = yS$. Wegen 8.2 und 8.6 ist $\chi_o(fR) \subsetneq R_R$, also $f \in J$, d.h. $y \in JS$. Sei $x \in R_\infty$. Weil $\chi_o(xR) \subsetneq R_R$ gilt, folgt mit 8.2 und 8.6 $\chi_o(xS) \subsetneq S_S$, also $x \in JS$. Wegen $JS \cap R = J$ folgt $x \in J$. Wir zeigen nun, daß der Isomorphismus j in 8.9 für ein Ideal I von R die durch $\{[xR] \mid x \in I\}$ erzeugte Untergruppe H_I von $K_O(R)$ auf die durch $\{[yS] \mid y \in IS\}$ erzeugte Untergruppe K_S in $K_O(S)$ abbildet.

Sei $x \in I$, $xR = eR$ für ein Idempotent e in R . Es ist $j[eR] = [eS]$, $e \in IS$.

Sei $y \in IS$, $yS = fS$ für ein Idempotent f in R . f liegt sogar in I und $j([fR]) = [fS]$.

Nun zum Beweis von $K_O(R/J) \cong K_O(S/JS)$:

Wir haben $K_O(R/J) \cong K_O(R/(J + R_\infty))$ und

$$K_O(S/JS) \cong K_O(S/(J + R_\infty)S) = K_O(S/(JS + R_\infty S)) = K_O(S/(JS + S_\infty)).$$

Weil $R/(J + R_\infty)$ und $S/(J + R_\infty)S$ wegen 8.13 die Substitutionseigenschaft besitzen, folgt aus ([5], Prop. 15.15, 15.18), daß

$K_O(R/(J + R_\infty)) \cong K_O(R)/H_{J+R_\infty}$ und $K_O(S/(J + R_\infty)S) \cong K_O(S)/K_{(J+R_\infty)S}$ gilt. Wegen oben folgt $K_O(R)/H_{J+R_\infty} \cong K_O(S)/K_{(J+R_\infty)S}$, also $K_O(R/J) \cong K_O(S/JS)$. #

Anhang

Satz

Sei $(A_i)_{i \in I}$ ein stark lokal semi-t-nilpotente Familie von Moduln A_i mit der n-Substitutionseigenschaft ($n \in \mathbb{N}$). Dann besitzt $A := \bigoplus_{i \in I} A_i$ die n-Substitutionseigenschaft.

Beweis

Die Behauptung wird für $n = 2$ bewiesen. Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ geht der Beweis analog.

Sei $M = A \oplus B \oplus H = D \oplus K$ mit $A \cong B \cong D$. Gesucht sind $C \subset M$, $L \subset A \oplus B$, so daß $M = C \oplus L \oplus H = C \oplus K$ ist.

Wegen $A \cong B \cong D$ gibt es Familien $(B_i)_{i \in I}$, $(D_i)_{i \in I}$ von Moduln, so daß $B = \bigoplus_{i \in I} B_i$, $D = \bigoplus_{i \in I} D_i$, $B_i \cong A_i \cong D_i$ für $i \in I$. Es folgt, daß

$$M = \bigoplus_{i \in I} (A_i \oplus B_i) \oplus H = \bigoplus_{i \in I} D_i \oplus K, \quad A_i \cong B_i \cong D_i.$$

$$\begin{aligned} \text{Sei } N := \{ (X, (C_i, L_i)_{i \in X}) \mid X \subset I, M = \bigoplus_{i \in X} C_i \oplus \bigoplus_{i \in X} L_i \oplus \bigoplus_{i \in I \setminus X} (A_i \oplus B_i) \oplus H \\ = \bigoplus_{i \in X} C_i \oplus \bigoplus_{i \in I \setminus X} D_i \oplus K, \quad L_i \subset A_i \oplus B_i \text{ für } i \in X \}. \end{aligned}$$

N ist nicht leer, denn $(\emptyset, (0,0)_{i \in \emptyset}) \in N$.

Durch $(X, (C_i, L_i)_{i \in X}) \leq (Y, (C'_i, L'_i)_{i \in Y}) \Leftrightarrow X \subset Y, C_i = C'_i, L_i = L'_i$ für $i \in X$, ist eine Ordnung auf N definiert. Sei eine Kette $T = (X^\mu, (C_i^\mu, L_i^\mu)_{i \in X^\mu})_{\mu \in P}$ in N gegeben, und sei $X := \bigcup_{\mu \in P} X^\mu$. Für $i \in X$ ist dann $i \in X^\mu$ für ein $\mu \in P$, und da T eine Kette ist, ist die Definition $C_i := C_i^\mu, L_i := L_i^\mu$ sinnvoll. Im folgenden wird gezeigt, daß $(X, (C_i, L_i)_{i \in X})$ eine obere Schranke von T in N ist.

$$\text{Behauptung 1: } M = C \oplus L \oplus V \text{ für } \hat{C} := \bigoplus_{i \in X} C_i, \hat{L} := \bigoplus_{i \in X} L_i, V := \bigoplus_{i \in I \setminus X} (A_i \oplus B_i) \oplus H,$$

Beweis:

Für beliebiges $\mu \in P$ gilt :

$$\begin{aligned} M &= \bigoplus_{i \in X} (A_i \oplus B_i) \oplus \bigoplus_{i \in I \setminus X} (A_i \oplus B_i) \oplus H = \\ &= \bigoplus_{i \in X^\mu} C_i^\mu \oplus \bigoplus_{i \in X^\mu} L_i^\mu \oplus \bigoplus_{i \in X \setminus X^\mu} (A_i \oplus B_i) \oplus \bigoplus_{i \in I \setminus X} (A_i \oplus B_i) \oplus H, \\ \text{d.h. mit } C^\mu &:= \bigoplus_{i \in X^\mu} C_i^\mu, L^\mu := \bigoplus_{i \in X^\mu} L_i^\mu, G := \bigoplus_{i \in X} (A_i \oplus B_i), {}^\mu G := \bigoplus_{i \in X \setminus X^\mu} (A_i \oplus B_i) \\ M &= G \oplus V = C^\mu \oplus L^\mu \oplus {}^\mu G \oplus V \text{ für } \mu \in P. \end{aligned}$$

Wegen $C^\mu + L^\mu + V = C^\mu \oplus L^\mu \oplus V$ für alle $\mu \in P$, $\hat{C} = \bigcup_{\mu \in P} C^\mu, \hat{L} = \bigcup_{\mu \in P} L^\mu$, ist dann auch $\hat{C} + \hat{L} + V = \hat{C} \oplus \hat{L} \oplus V$, d.h. es bleibt $\hat{C} \oplus \hat{L} \oplus V = M$ zu zeigen.

Sei $\bar{p}$ die Projektion von M auf G mit Kern V . Wir müssen zeigen, daß $p := \bar{p}|_{(\hat{C} \oplus \hat{L})}$ ein Epimorphismus, also $\text{Bi}(p) = G$ ist. Angenommen, p ist nicht surjektiv: Dann gibt es ein $x \in G$ mit $x \notin \text{Bi}(p)$. Es existiert also ein $i_1 \in X$, so daß die i_1 -te Komponente von x in G nicht aus $\text{Bi}(p)$ ist. Der i_1 -te Summand von G ist

$A_{i_1} \oplus B_{i_1}$. Offenbar ist die Komponente von x in A_{i_1} oder jene in B_{i_1} nicht in $\text{Bi}(p)$. Sei dies o.E jene in A_{i_1} und sei sie x_1 genannt. Sei $i_1 \in X^{\mu_1}$ für ein $\mu_1 \in P$, $x_1 = f_1 + y_1 + k_1$ die Zerlegung von x_1 in $(C^{\mu_1} \oplus L^{\mu_1}) \oplus {}^{\mu_1}G \oplus V$, d.h. $f_1 \in (C^{\mu_1} \oplus L^{\mu_1})$, $y_1 \in {}^{\mu_1}G$, $k_1 \in V$. Dann ist $y_1 \notin \text{Bi}(p)$, denn sonst gäbe es ein $f_2 \in (\hat{C} \oplus \hat{L})$, $k_2 \in V$, so daß $f_2 = y_1 + k_2$, also $x_1 = (f_1 + f_2) + (k_1 - k_2)$, $f_1 + f_2 \in \hat{C} \oplus \hat{L}$, $k_1 - k_2 \in V$, also $(f_1 + f_2) = x_1 - (k_1 - k_2)$, d.h. $x_1 \in \text{Bi}(p)$. Wie oben folgt, daß ein $i_2 \in X \setminus X^{\mu_1}$ existiert, sodaß die i_2 -te Komponente von y_1 in ${}^{\mu_1}G$ nicht aus $\text{Bi}(p)$ ist. Weiter ergibt sich analog wie oben, daß die Komponente von y_1 in A_{i_2} oder B_{i_2} nicht aus $\text{Bi}(p)$ ist. Der weitere Verlauf des Beweises wird zeigen, daß es unerheblich ist, welche der beiden Komponenten nicht aus $\text{Bi}(p)$ ist. Sei es jene in A_{i_2} und sei sie x_2 genannt. Sei jetzt für $i \in X$ e_i die Einbettung von A_i in M , für $\mu \in P$ μ_p die Projektion von M auf ${}^{\mu}G$ mit Kern $C^{\mu} \oplus L^{\mu} \oplus V$, und für $j \in X \setminus X^{\mu}$ $t_{j,\mu}$ die Projektion von ${}^{\mu}G$ auf A_j mit Kern $B_j \oplus \bigoplus_{i \in X'} (A_i \oplus B_i)$, $X' := X \setminus (X^{\mu} \cup \{j\})$. Dann ist durch $f_1 := t_{i_2, \mu_1} {}^{\mu_1} p e_{i_1}$ ein Homomorphismus von A_{i_1} nach A_{i_2} definiert, wobei $i_1 \neq i_2$ nach Konstruktion und $f_1(x_1) = t_{i_2, \mu_1} {}^{\mu_1} p(x_1) = t_{i_2, \mu_1}(y_1) = x_2$. Da x_2 nicht aus $\text{Bi}(p)$ ist, findet sich völlig analog zu den vorangegangenen Überlegungen ein $\mu_2 \in P$, $i_3 \in X$, $x_3 \in M$ mit $i_2 \in X^{\mu_2}$, $i_3 \in X \setminus X^{\mu_2}$, $x_3 \in A_{i_3}$, $x_3 \notin \text{Bi}(p)$, und ein Homomorphismus f_2 von A_{i_2} nach A_{i_3} mit $f_2(x_2) = x_3$. Induktiv ergibt sich also eine Folge $A_{i_1} \xrightarrow{f_1} A_{i_2} \xrightarrow{f_2} A_{i_3} \xrightarrow{f_3} \dots$, $i_k \in X$, $i_k \neq i_l$ für $k \neq l$, von Homomorphismen f_j mit $f_n f_{n-1} \dots f_1(x_1) = x_n \notin \text{Bi}(p)$. Ohne die oben gemachte Einschränkung würde sich eine Folge mit denselben Eigenschaften ergeben, da nur an Stelle einiger A_{i_k} B_{i_k} stehen würde, was wegen $A_{i_k} \cong B_{i_k}$ unbedeutend ist. Die Existenz der obigen Folge ergibt jetzt einen Widerspruch zur starken lokalen Semi- t -Nilpotenz von $(A_i)_{i \in I}$. Somit ist p surjektiv, also $M = \hat{C} \oplus \hat{L} \oplus V$.

Behauptung 2: $M = \hat{C} \oplus \bigoplus_{i \in I \setminus X} D_i \oplus K$.

Beweis:

Da $M = \bigoplus_{i \in X} D_i \oplus \bigoplus_{i \in I \setminus X} D_i \oplus K$ ist, genügt es zu zeigen, daß die Projektion p von M auf $\bigoplus_{i \in X} D_i$ mit Kern $\bigoplus_{i \in I \setminus X} D_i \oplus K$, eingeschränkt auf $\hat{C}$, ein Isomorphismus ist. Wegen $\bigoplus_{i \in X} C_i \cap (\bigoplus_{i \in I \setminus X} D_i \oplus K) = 0$ für alle $\mu \in P$ ist $\hat{C} + \bigoplus_{i \in I \setminus X} D_i \oplus K = \hat{C} \oplus \bigoplus_{i \in I \setminus X} D_i \oplus K$, d.h. $p|_{\hat{C}}$ ein Monomorphismus, und die Annahme, daß $p|_{\hat{C}}$ nicht surjektiv sei, ergibt analog zum Beweis der 1. Behauptung einen Widerspruch zur starken lokalen Semi- t -Nilpotenz von $(D_i)_{i \in I}$. Die erste und zweite Behauptung ergeben!

$M = \bigoplus_{i \in X} C_i \oplus \bigoplus_{i \in X} L_i \oplus \bigoplus_{i \in I \setminus X} (A_i \oplus B_i) \oplus H = \bigoplus_{i \in X} C_i \oplus \bigoplus_{i \in I \setminus X} D_i \oplus K$, wobei für alle $\mu \in P$ und alle $i \in X^{\mu}$, also für alle $i \in X$ $L_i \subset (A_i \oplus B_i)$ gilt.

Dies bedeutet, daß $(X, (C_i, L_i)_{i \in X})$ eine obere Schranke der Kette T in N ist. Mit dem Lemma von Zorn gibt es ein maximales Element $(Y, (C_i, L_i)_{i \in Y})$ in N . Angenommen, $Y \neq I$, d.h. es gibt ein $s \in I \setminus Y$. Es ist dann mit $Y' := Y \cup \{s\}$

$$M = (A_s \oplus B_s) \oplus \left(\bigoplus_{i \in Y} C_i \oplus \bigoplus_{i \in Y} L_i \oplus \bigoplus_{i \in I \setminus Y} (A_i \oplus B_i) \right) \oplus H = D_s \oplus \left(\bigoplus_{i \in Y} C_i \oplus \bigoplus_{i \in I \setminus Y} D_i \oplus K \right).$$

Weil A_s die 2-Substitutionseigenschaft besitzt, existieren $C_s \subset M$, $L_s \subset A_s \oplus B_s$, so daß $M = C_s \oplus L_s \oplus \left(\bigoplus_{i \in Y} C_i \oplus \bigoplus_{i \in Y} L_i \oplus \bigoplus_{i \in I \setminus Y} (A_i \oplus B_i) \right) \oplus H = C_s \oplus \left(\bigoplus_{i \in Y} C_i \oplus \bigoplus_{i \in I \setminus Y} D_i \oplus K \right)$. Offenbar ist $(Y, (C_i, L_i)_{i \in Y}) < (Y', (C_i, L_i)_{i \in Y'})$ im Widerspruch zur Maximalität von $(Y, (C_i, L_i)_{i \in Y})$.

$$\text{Mit } C := \bigoplus_{i \in I} C_i, L := \bigoplus_{i \in I} L_i \text{ folgt } M = C \oplus L \oplus H = C \oplus K, L \subset \bigoplus_{i \in I} (A_i \oplus B_i) = A \oplus B. \quad \#$$

Satz

Sei M ein Modul mit der endlichen Austausch eigenschaft. Dann sind äquivalent:

- a) M hat die Substitutionseigenschaft.
- b) M hat die Kürzungseigenschaft.

Beweis

a) $\Rightarrow$ b) ist klar.

b $\Rightarrow$ a): Sei $N = M_1 \oplus H = M_2 \oplus K$, $M_1 \cong M_2 \cong M$. Wegen ([22], Th.2.1) reicht es, ein $C \subset N$ zu finden mit $M_1 \oplus C = M_2 \oplus C$, und mit ([22], p.461) ist $H \cong M$ keine Einschränkung der Allgemeinheit. Weil M_1 die endliche Austausch eigenschaft besitzt, gibt es $M_2' \subset M_2$, $K = K' \oplus K''$, so daß $N = M_1 \oplus M_2' \oplus K'$, also $N = (M_1 \oplus K') \oplus M_2' = (M_2 \oplus K') \oplus K''$. $(M_2 \oplus K')$ hat die endliche Austausch eigenschaft. Es existieren somit $(M_1 \oplus K')' \subset (M_1 \oplus K')$, $M_2' \subset M_2'$, so daß $N = (M_2 \oplus K') \oplus (M_1 \oplus K')' \oplus M_2'$. Klar ist $M_2' = 0$, also $N = (M_1 \oplus K') \oplus M_2' = (M_2 \oplus K') \oplus (M_1 \oplus K')'$. Wir setzen $D := (M_1 \oplus K')$, $D' := (M_1 \oplus K')'$, $E := (M_2 \oplus K')$, $E' := M_2'$ und erhalten $N = D \oplus E' = E \oplus D'$, $E' \subset E$, $D' \subset D$. $D \cong E$ hat die Kürzungseigenschaft. Es ist also $D' \cong E'$. Sei $f: D' \longrightarrow E'$ ein Isomorphismus und $F := \{d' + f(d') \mid d' \in D'\}$. Wir rechnen ohne Mühe nach, daß gilt: $N = D \oplus F = E \oplus F$, d.h.

$N = M_1 \oplus (K' \oplus F) = M_2 \oplus (K' \oplus F)$: Mit $C := K' \oplus F$ folgt die Behauptung. $\#$

Literaturverzeichnis

- [1] Ara, P.
Aleph-nought-continuous regular rings.
J. of Algebra 109, (1987), 115 - 126.
- [2] Chase, S.U.
Direct product of modules.
Trans. Amer. Math. Soc. 97, (1969), 457 - 473.
- [3] Faith, C.
Algebra I, Rings, Modules and Categories.
Springer Verlag 1981.
- [4] Goodearl, K.
Ring Theory; nonsingular rings and modules.
Marcel Dekker 1976.
- [5] Goodearl, K.
Von Neumann regular rings.
Pitman 1979.
- [6] Goodearl, K., Handelman, D.E. and Lawrence, J.W.
Affine representations of Grothendieck groups and applications to Rickart C^* -Algebras and $\aleph_0$ -continuous regular rings.
Memoirs of the American Mathematical Society, No. 234, (1980).
- [7] Goodearl, K.
Directly finite aleph-nought continuous regular rings.
Pacific J. of Math. 100, (1982), 105 - 122.
- [8] Jeremy, L.
Modules et anneaux quasi-continus.
Canad. Math. Bull. 17, (1974), 217 - 227.
- [9] Kasch, F.
Moduln und Ringe.
Teubner 1977.
- [10] Kutami, M.
 $\aleph_0$ -continuous, directly finite, projective modules over regular rings.
Math. J. Okayama 25, (1983), 157 - 163.

- [11] Kutami, M.
 χ_0 -continuous modules.
Osaka J. Math. 21, (1984), 31 - 37.
- [12] Menal, P. and Moncasi, J.
Lifting units in self-injective rings and an index theory for Rickart C^* -Algebras.
Pacific J. Math. 126, (1987), 295 - 329.
- [13] Mucke, C.
Substitutions- und Kürzungseigenschaft bei Moduln.
Diplomarbeit, München 1985.
- [14] Müller, B.J. and Rizvi, S.T.
On injective and quasi-continuous modules.
J. of pure and applied Algebra 28, (1983), 197 - 210.
- [15] Müller, B.J. and Rizvi, S.T.
Direct sums of indecomposable modules.
Osaka J. Math. 21, (1984), 365 - 374.
- [16] Nicholson, W.K.
Lifting idempotents and exchange rings.
Trans. Amer. Math. Soc. 129, (1977), 269 - 278.
- [17] Oshiro, K.
Continuous modules and quasi-continuous modules.
Osaka J. Math. 20, (1983), 681 - 694.
- [18] Stock, J.
Über die Austauschseigenschaft von Moduln.
Dissertation, München 1982.
- [19] Vaserstein, L.W.
Bass's first stable range condition.
J. of pure and applied algebra 34, (1984), 319 - 330.
- [20] Warfield Jr., R.B.
A Krull Schmidt theorem for infinite sums of modules.
Proc. Amer. Math. Soc. 22, (1963), 460 - 465.
- [21] Warfield Jr., R.B.
Exchange rings and decompositions of modules.
Math. Ann. 199, (1972), 31 - 32.

[22] Warfield Jr., R.B.

Cancellation of modules and groups and stable range of endomorphism rings.
Pac. J. Math. 91, (1980), 457 - 485.

[23] Würfel, T.

Über absolut reine Ringe.
Algebra Berichte Nr. 4, (1973).

[24] Zimmermann-Huisgen, B. and Zimmermann, W.

Classes of modules with the exchange property.
J. of Algebra 88, (1984), 416 - 434.

[25] Zöllner, A.

Lokal-direkte Summanden.
Algebra Berichte Nr. 51, (1984).

Lebenslauf

Name:	Christian Mucke
Geboren:	9. September 1957 in Crailsheim
Familienstand:	ledig
Staatsangehörigkeit:	deutsch
1963 - 1967	Grundschule in Nürnberg
1967 - 1976	Gymnasium in Nürnberg
Mai 1976	Abitur
1976 - 1977	Grundwehrdienst in Amberg
1977 - 1978	Studium des Maschinenbaus in München
1978 - 1981	Studium der Mathematik in München
1981 - 1982	Studium der Mathematik in Nizza
1981 - 1985	Studium der Mathematik in München
Dezember 1985	Diplom in Mathematik
Dezember 1985	Beginn der Promotion bei Professor Dr. F. Kasch am Lehrstuhl für Mathematik in München

München, den 10. Januar 1988

C. Mucke

Algebra

Berichte

Herausgeber/Editors

Prof. Dr. Friedrich Kasch,
Prof. Dr. Bodo Pareigis
Mathematisches Institut
der Ludwig-Maximilians-
Universität München
Theresienstr. 39
8000 München 2
West-Germany

Verlag/Publisher

Reinhard Fischer
Fallmerayerstraße 36
8000 München 40
West-Germany

Abonnement- oder
Einzeltitelbestellungen richten Sie
an den Verlag.

Korrespondenz und Manuskripte
bitte an die Herausgeber.

Please send subscription or
copy order directly to the publisher.

Please send correspondence and
manuscripts to the editors.

ISBN 3-88927-042-5